

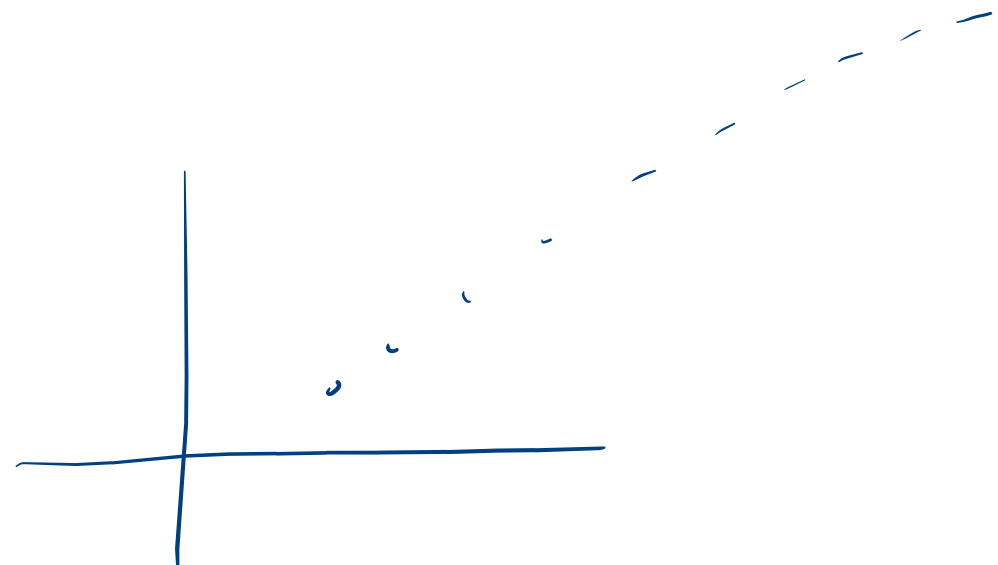
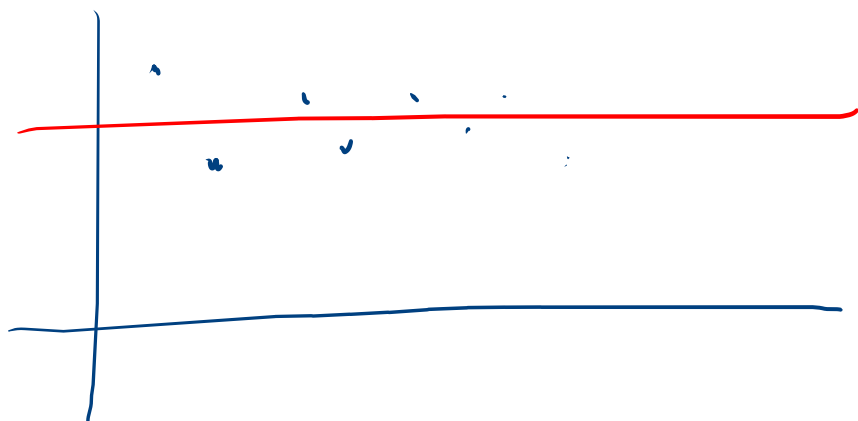
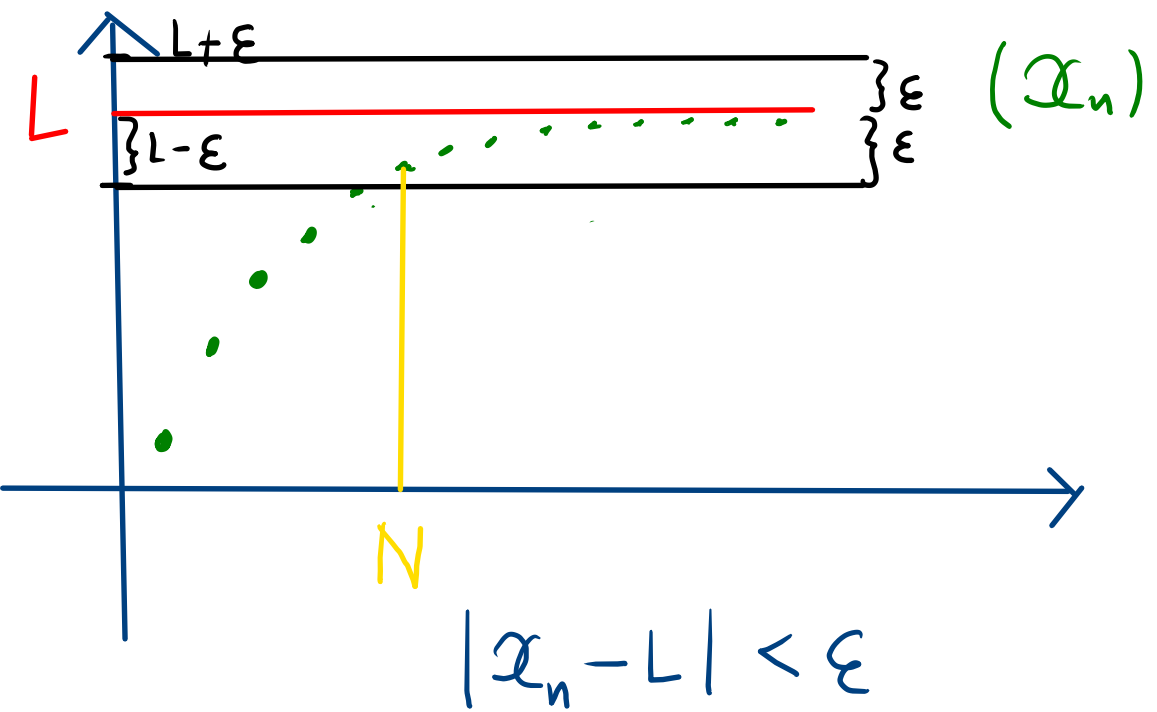
07.11.25

Suite convergente

Une suite (x_n) converge vers un nombre L si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N qui dépend de ε , tel que $n > N$, alors $|x_n - L| < \varepsilon$.

Pour exprimer que la suite (x_n) converge vers une limite L , on note

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$$



Exemple :

$(x_n)_{n \geq 1}$ définie par $x_n = \frac{1}{n}$

Cette suite semble converger vers 0.

Soit $\varepsilon = 0,05$. Trouvons $N = N(\varepsilon) \geq 1$

tel $|0 - \frac{1}{n}| < 0,05$.

$$\begin{array}{l|l} \text{En fait } \frac{1}{n} < 0,05 & \cdot n \\ 1 < 0,05n & \div 0,05 \\ \frac{1}{0,05} < n & \\ n > 20 & \end{array}$$

Posons $N = 20$.

Vérifions que $N = 20$ satisfait la condition :

$$n = 21 \quad |0 - \frac{1}{21}| < 0,05$$

$$n = 108 \quad |0 - \frac{1}{108}| < 0,05$$

Cas général : Soit $\varepsilon > 0$.

$$|0 - \frac{1}{n}| < \varepsilon$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{n} < \varepsilon & \cdot n \\ 1 < n \cdot \varepsilon & \div \varepsilon \end{array}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon = 0,0071$$

On choisit $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$

Pour $n > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, on a $|0 - \frac{1}{n}| < \varepsilon$.

2.5.5 Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et $\epsilon > 0$. Si on accepte que la suite converge vers L , trouver le plus petit entier positif N tel que $|u_n - L| < \epsilon$, pour tout $n > N$.

a) $u_n = \frac{3}{n-2}$, avec $L = 0$ et $\epsilon = 0,1$ b) $u_n = \frac{n}{n+1}$, avec $L = 1$ et $\epsilon = 0,25$

En considérant ϵ quelconque, démontrer que les suites ci-dessus sont convergentes.

a) $\left| 0 - \frac{3}{n-2} \right| < 0,1$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{n-2} < 0,1 \\ 3 < 0,1(n-2) \end{array} \right\} \cdot (n-2)$$

$$30 < n-2$$

$$n > 32 \Rightarrow N = 32$$

$n=33$ $\frac{3}{30} < 0,1$

Cas général . Soit $\epsilon > 0$. Trouvons N tel que pour tout $n > N$, on a $\left| 0 - \frac{3}{n-2} \right| < \epsilon$

$$\frac{3}{n-2} < \epsilon \quad \left| \cdot (n-2) \right.$$

$$3 < (n-2)\epsilon \quad \left| \div \epsilon \right.$$

$$\frac{3}{\epsilon} < n-2$$

$$n > 2 + \frac{3}{\epsilon}$$

$$n > \frac{2\epsilon + 3}{\epsilon}$$

On choisit $N = \left\lceil \frac{2\epsilon + 3}{\epsilon} \right\rceil$

b) $u_n = \frac{n}{n+1}$, avec $L = 1$ et $\epsilon = 0,25$

$$\left| 1 - \frac{n}{n+1} \right| < 0,25$$

$$\left| \frac{n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1} \right| < 0,25$$

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| < 0,25$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{n+1} < 0,25 \\ 1 < 0,25(n+1) \\ 4 < n+1 \\ n > 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot (n+1) \\ \cdot 4 \\ -1 \end{array} \right.$$

$$N = 3$$

Cas général : $\left| 1 - \frac{n}{n+1} \right| < \epsilon$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{n+1} < \epsilon \\ 1 < \epsilon(n+1) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot (n+1) \\ \div \epsilon \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{\epsilon} < n+1$$

$$n > \frac{1}{\epsilon} - 1$$

$$n > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$$

On choisit $N = \left\lceil \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \right\rceil$

2.5.6 Calculer :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n-1}$

$$x_n = \frac{4n}{2n-1}$$

Démontrons que cette suite converge vers 2.

Soit $\varepsilon > 0$. Déterminons N tel que pour tout $n > N$, on

$$2 \quad \left| 2 - \frac{4n}{2n-1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2(2n-1) - 4n}{2n-1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{4n-2-4n}{2n-1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-2}{\underbrace{2n-1}_{>0}} \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \frac{2}{2n-1} < \varepsilon \\ 2 < \varepsilon(2n-1) \\ \frac{2}{\varepsilon} < 2n-1 \\ \frac{2}{\varepsilon} + 1 < 2n \\ 2n > \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \\ n > \frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cdot \underbrace{(2n-1)}_{>0} \\ \div \varepsilon \\ + 1 \\ \div 2 \end{array}$$

On choisit $N = \left\lceil \frac{\varepsilon+2}{2\varepsilon} \right\rceil$

2.5.6 Calculer :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n-1}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{1-n^2}$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{4n}}{\cancel{n} \left(2 - \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{2 - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{1-n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} \cdot 2}{\cancel{n^2} \left(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\rightarrow 0} - 1 \right)} = \frac{2}{-1} = -2$$

Règles de calcul sur les limites

• (x_n) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

• (y_n) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$ si $y \neq 0$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right| = |x|$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^3} = 0$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2n(-1)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n} [3 + 2 \cdot (-1)^n]}{\cancel{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (3 + 2 \cdot (-1)^n) = \begin{array}{l} \text{pair} \quad 5 \\ \text{impar} \quad 1 \end{array}$$

diverge

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^4}{(1-n^2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right)^4}{\left(n^2 \left(\frac{1}{n^2} - 1\right)\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^4 \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^4}{\left(n^2 \left(\frac{1}{n^2} - 1\right)\right)^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{16n^4} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^4}{\cancel{n^4} \left(\frac{1}{n^2} - 1\right)^2} = 16$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2}{\sqrt{n^4 - 5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{7n^2}}{\cancel{n^2} \sqrt{1 - \frac{5}{n^4}}} = 7$$