10.09.25

1.3.4 Démontrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins un zéro réel.

Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme à coefficients complexes de degré n a exactement n racines complexes.

Exemples

$P_2 = X^2 + 1$ a exactement 2 racines complexes à savoir i et $-i$

$P_4 = x^4 + 1$ a exactement 4 racines complexes

$P_3 = x^3 + 1$ a exactement 1 racine réelle et 2 racines complexes

$= (x+1)\underbrace{(x^2 - x + 1)}$

Ses racines sont conjuguées

Si w est une racine complexe d'un polynôme de degré n à coefficients réels, alors $\overline{w}$ est aussi racine.

1.3.2 Décomposer dans $\mathbb{R}[z]$ et $\mathbb{C}[z]$ les polynômes ci-dessous :

a) $z^4 - 1$ d) $z^6 - 1$

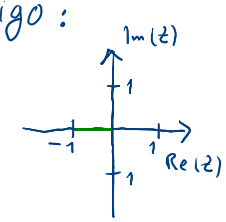
a) $p = z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = \underline{(z-1)(z+1)(z^2+1)}$

$p = z^4 - 1 = \underline{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$

b) $p = z^4 + 1$

On cherche ses zéros en utilisant la forme trigo :

On pose $z = [r, \theta]$ tel que $z^4 = -1$.



$\Rightarrow z^4 = -1$

$\Rightarrow [r^4, 4\theta] = [1, \pi]$

$\Rightarrow \begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow^{*} \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{\pi + k \cdot 2\pi}{4} \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, 3$

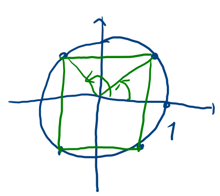
$45° + k \cdot 90°$

$k=0 : z_0 = 1\left(\cos(45°) + i \sin(45°)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$k=1 : z_1 = 1\left(\cos(135°) + i \sin(135°)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$k=2 : z_2 = 1\left(\cos(225°) + i \sin(225°)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \overline{z_1}$

$k=3 : z_3 = 1\left(\cos(315°) + i \sin(315°)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \overline{z_0}$



$* \quad \theta = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} = 45° + k \cdot 90°$

$p = \underbrace{\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}_{z_0} \underbrace{\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}_{z_3} \underbrace{\left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}_{z_1} \underbrace{\left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}_{z_2}$

$= \underline{(z^2 - \sqrt{2} z + 1)} \, \underline{(z^2 + \sqrt{2} z + 1)}$

$z^8 + 1$

page 18

Racines n-ièmes

On note $z = r\,\text{cis}(\varphi)$ un nombre complexe non nul.

L'équation $w^n = z, n \in \mathbb{N}^*$, possède n solutions distinctes :

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{r}\ \text{cis}\left(\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

$z_A = a + b\,i$

$$z = r\,\text{cis}(\varphi) = [r, \varphi]$$
$$= r\left(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\right)$$