11.03.26

2.10.10 Étudier les fonctions suivantes :

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

1°) Recherche de ED(f).

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$. On exclut les zéros du dénominateur

2°) Signe de la fonction

Zéro de la fonction : $x^3 = 0 \iff x = 0$

x		-2		0		2	
$f(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

$-2 \quad 0 \quad 2$

3°) Recherche des AV

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) \underset{\text{"}\frac{-8}{0}\text{"}}{=} \infty$

$x = -2$ est une AV

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = +\infty \end{cases}$

AV

$x = -2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \underset{\text{"}\frac{8}{0}\text{"}}{=} \infty$

$x = 2$ est une AV

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty \end{cases}$

AV

$x = 2$

Recherche de l'AH/AO

On a une AO !

$$\begin{array}{r|l} x^3 \ \ldots \ \ldots \ \ldots & x^2 - 4 \\ \cline{2-2} -\ (x^3 \quad -4x) & x \\ \hline \text{reste : } 4x & \end{array}$$

$f(x) = x + \underbrace{\dfrac{4x}{x^2 - 4}}_{\delta(x)}$

AO : $y = x$

Position de la courbe par rapport à son AO

x		-2		0		2	
$\delta(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$
Position	dessous	$\|\|$	dessus	$\boxed{\text{coupe}}$	dessous	$\|\|$	dessus

4) Etude de la croissance

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

$u = x^3 \quad ; \quad u' = 3x^2$

$v = x^2 - 4 \quad ; \quad v' = 2x$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2\left[3x^2 - 12 - 2x^2\right]}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

$(x-2)^2(x+2)^2$

Tableau de la croissance

x		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\boxed{\text{max}}$	↘	‖	↘		↘	‖	↘	$\boxed{\text{min}}$	↗

$x^2(\underbrace{x^2 - 12})$

$x^2 \downarrow 0$

$\pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

$0, -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, -2, 2$

$(-3,4 \; ; \; -5,1)$

max : $\left(-2\sqrt{3} \; ; -3\sqrt{3}\right)$

$(3,4 \; ; \; 5,1)$

min : $\left(2\sqrt{3} \; ; \; 3\sqrt{3}\right)$

$$f(-2\sqrt{3}) = \frac{(-2\sqrt{3})^3}{(-2\sqrt{3})^2 - 4} = \frac{-8 \cdot 3\sqrt{3}}{12 - 4} = \frac{-\cancel{8} \cdot 3\sqrt{3}}{\cancel{8}} = -3\sqrt{3}$$

5°) <u>Courbure</u>

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

$u = x^2(x^2-12) = x^4 - 12x^2$; $u' = 4x^3 - 24x = 4x(x^2-6)$

$v = (x^2-4)^2$; $v' = 2(x^2-4)\cdot 2x = 4x(x^2-4)$

$$f''(x) = \frac{4x(x^2-6)\cdot(x^2-4)^2 - x^2(x^2-12)\cdot 4x(x^2-4)}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{4x\cancel{(x^2-4)}\left[(x^2-6)(x^2-4) - x^2(x^2-12)\right]}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}}$$

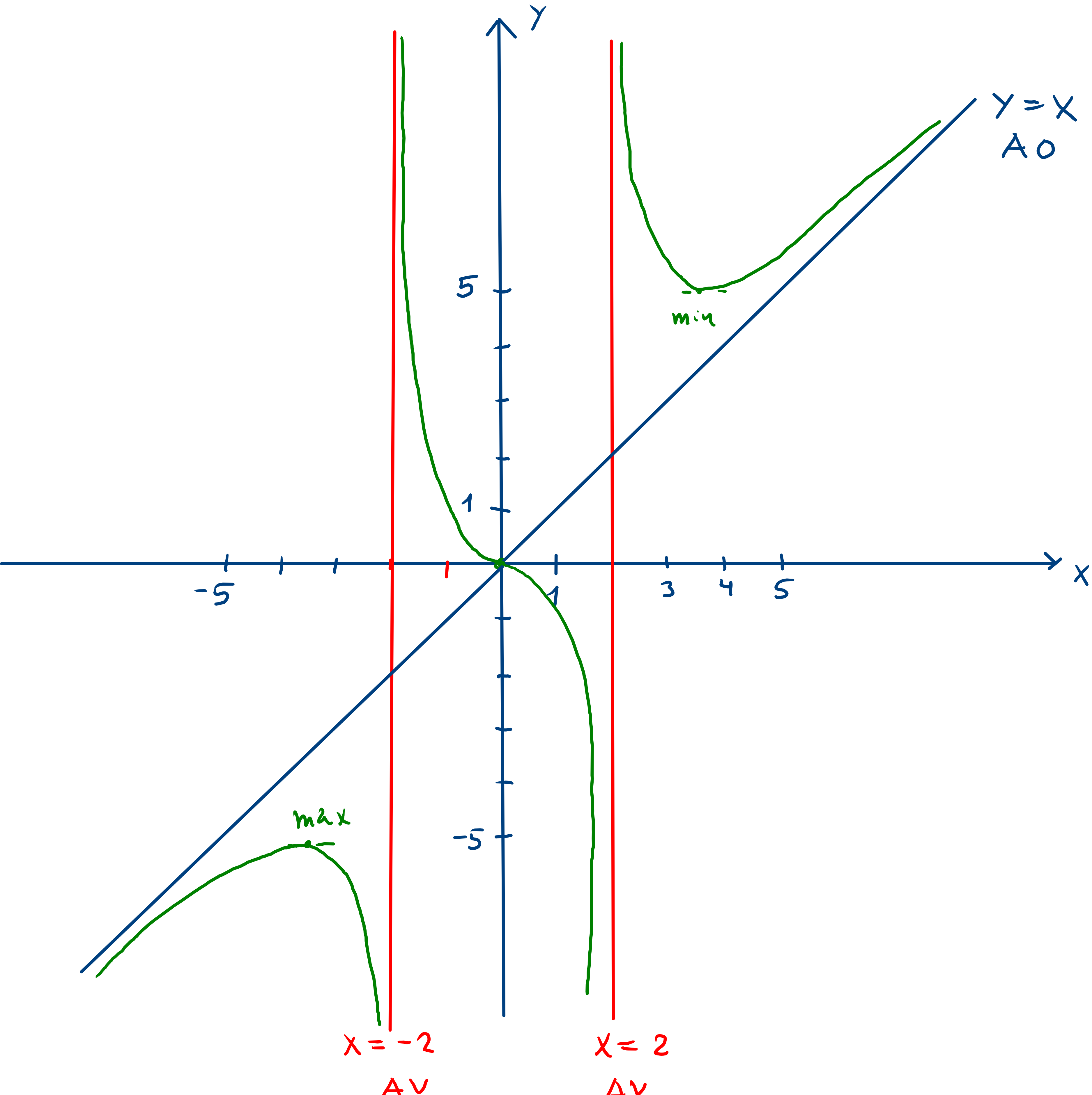
$$= \frac{4x\left[x^4 - 10x^2 + 24 - x^4 + 12x^2\right]}{(x^2-4)^3}$$

$$= \frac{4x(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$$

x		-2		0		2	
$f''(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$
$f(x)$		‖		pi		‖	

pi $(0;0)$

Ce pi est à tangente horizontale.



y
Y = X
AO
5
1
-5
-5
1
3
4
5
x
min
max
X = -2
AV
X = 2
AV