

Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique

s'il existe un nombre r , appelé la raison de la suite,

tel que $u_{n+1} = u_n + r$, $n \geq 1$

$$(u_n) = (1, -3, -7, -11, \dots)$$

Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe q tel que

$$u_{n+1} = q \cdot u_n$$

$$\text{Ex : } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \end{cases}$$

$$(u_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{u_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots \right) = 2$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2} S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Cas général :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = q u_n \end{cases} \quad q \in \mathbb{R}_+^*$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

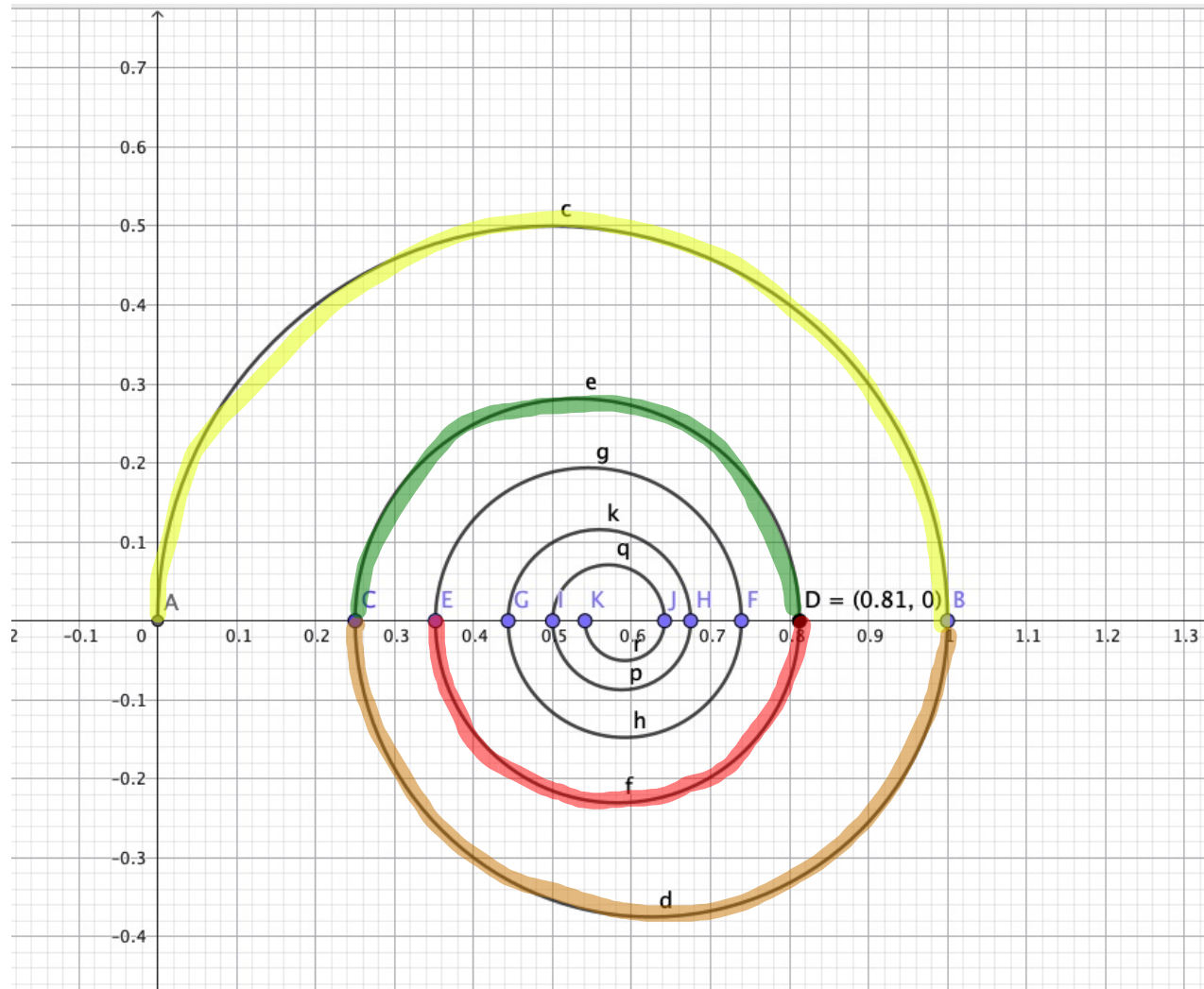
$$q S_n = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$$

$$(1-q) S_n = 1 - q^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

La série géométrique converge vers $\frac{1}{1-q}$ si et seulement

si $0 < q < 1$

2.5.15 On construit une spirale à l'aide d'une série de demi-cercles. Le diamètre du premier demi-cercle vaut 1 alors que le diamètre de chacun des demi-cercles suivants est égal aux trois quarts de celui du cercle précédent. Quelle est la longueur de la spirale et autour de quel point s'enroule-t-elle ?



$$P_0 = \frac{1}{2} \pi = \frac{\pi}{2}$$

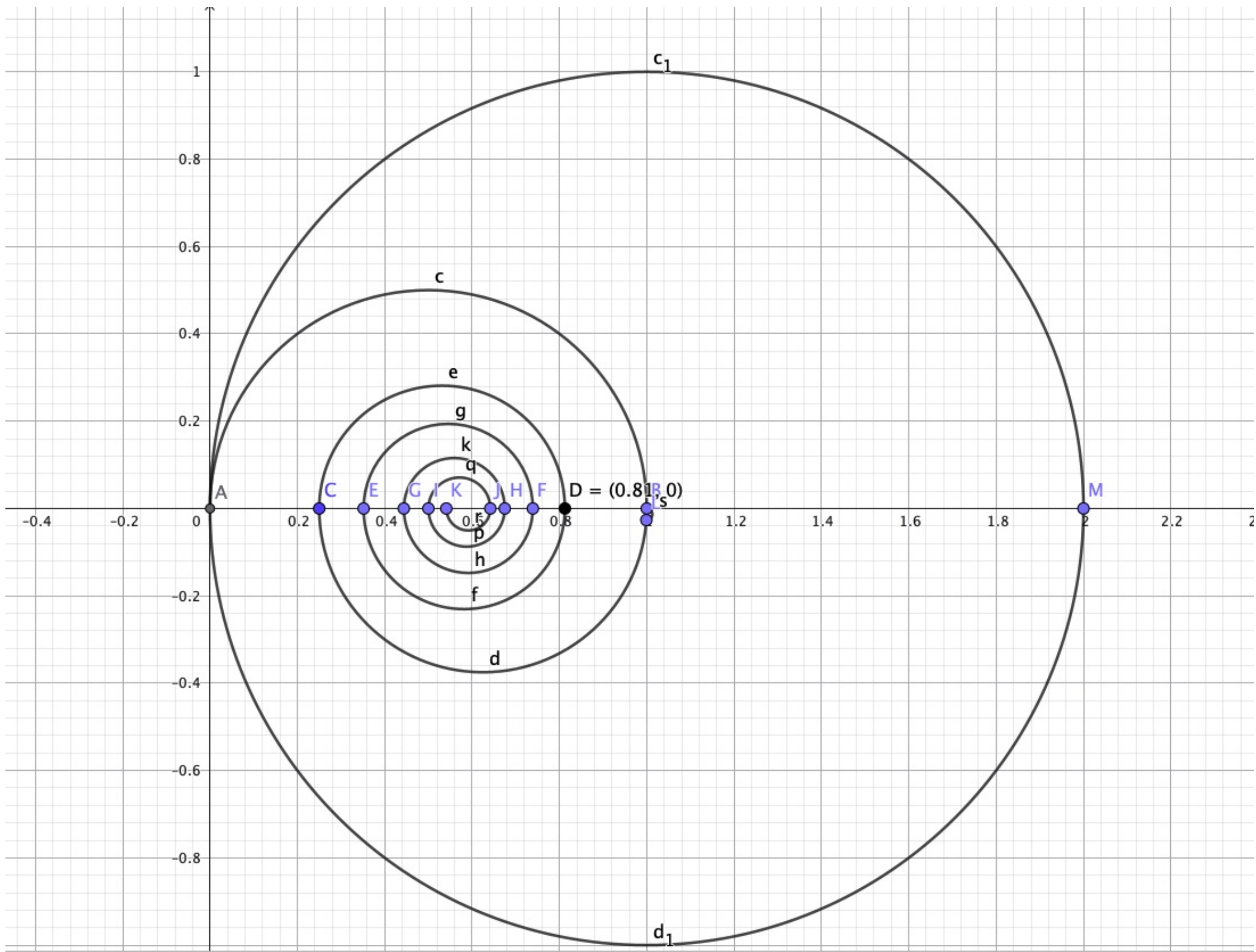
$$P_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \pi = \frac{3}{8} \pi = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$P_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} \pi = \frac{9}{32} \pi = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

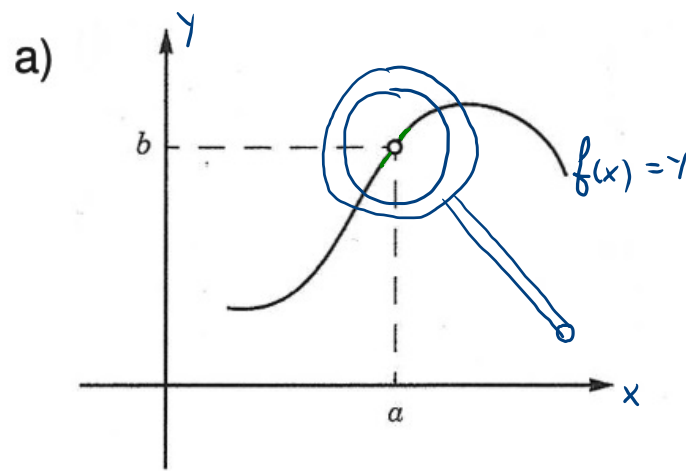
$$P_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{32} \pi = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$S_n = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{3}{4} + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n \right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 2\pi$$

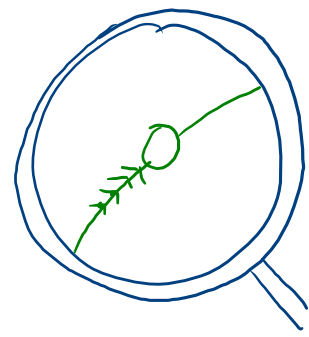


2.6.1 Lire les limites : $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.



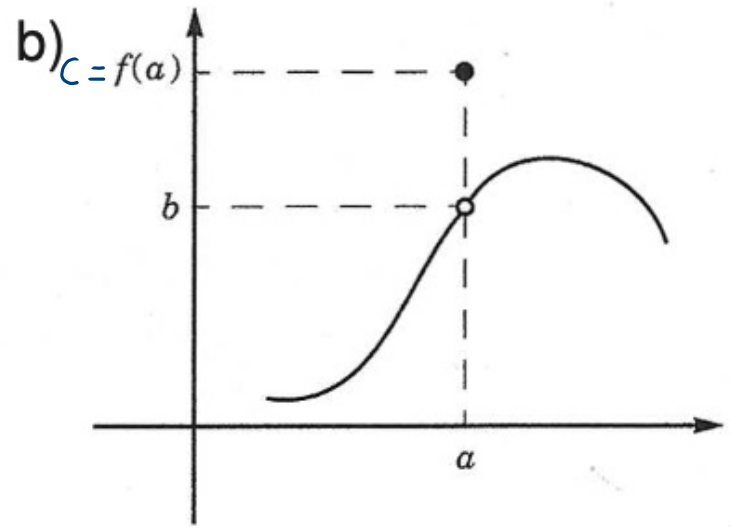
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$



$a \notin ED(f)$
 $f(a)$ n'existe pas

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

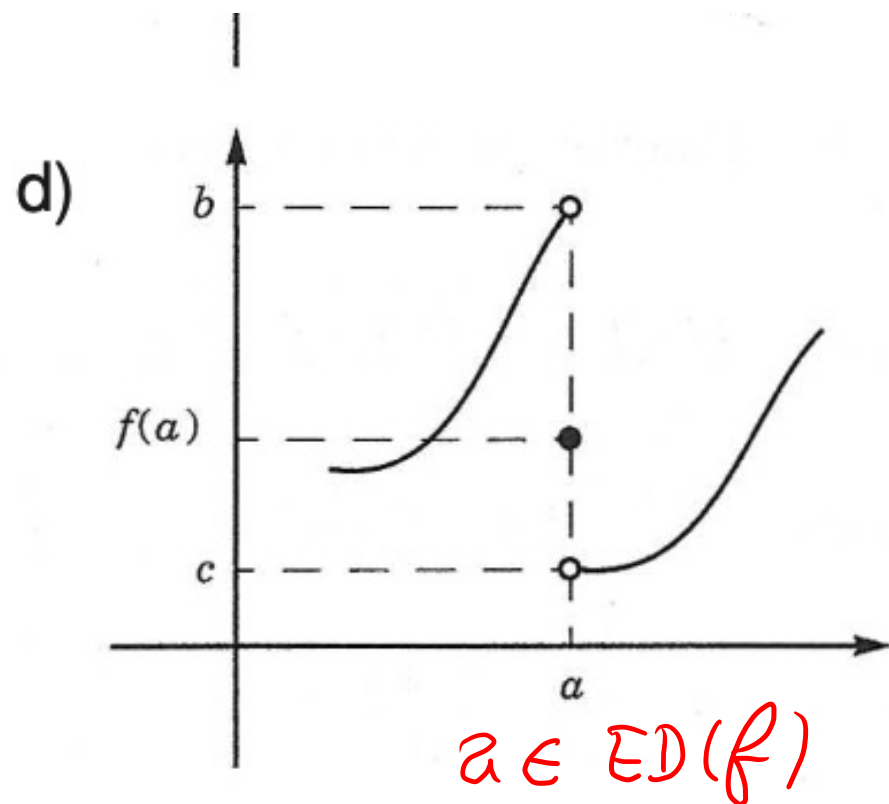
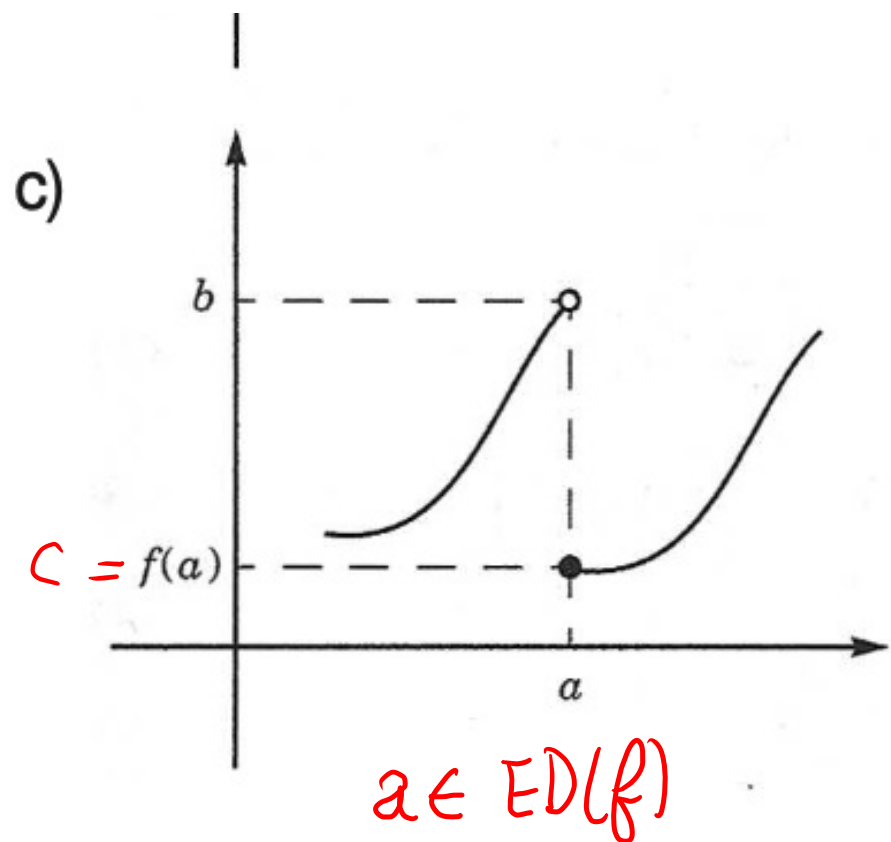


$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$a \in ED(f)$, $f(a) = c$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ n'existe pas}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ n'existe pas}$$

Limite d'une fonction en une valeur

Soit $a \in \mathbb{R}$. $f(x)$ admet le nombre L comme limite de la fonction lorsque x tend vers a , si les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de L lorsque x tend vers a et s'il est possible de choisir x de telle façon que $f(x)$ soit aussi proche que l'on veut de L .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Maxi-exemples

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2}$$

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2} = \frac{18 - 3 - 6}{1} = 9$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2} = 7$$

Python
↑

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2} \stackrel{\text{Ind}}{=} \frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(2x+3)}{\cancel{(x-2)}} = 7$$

$$f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x-3}{x}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x-3}{x} = +\infty$$

" $\frac{-3}{0_-}$ "

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x-3}{x} = -\infty$$

" $\frac{-3}{0_+}$ "

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x} = \infty$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas