

2.6.3 Calculer les limites suivantes :

$$e) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15} \underset{\substack{= \\ \text{"20"} \\ 80}}{=} \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16} \underset{\substack{\text{Ind} \\ \text{"0"} \\ 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{x(x-4)}}{(\cancel{x-4})(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x+4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 3x - 4} \underset{\substack{\text{Ind} \\ \text{"0"} \\ 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cancel{x-1})(2x^2 - x - 1)}{(\cancel{x-1})(x+4)} = \frac{0}{5} = 0$$

Par Horner :

	2	-3	0	1
① ↗		2	-1	-1
	2	-1	-1	0

2.6.4 Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4} \stackrel{\substack{\text{Ind} \\ \text{"0/0"}}}{=} \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4} \boxed{\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}} =$$

$\neq 0$ au voisinage de $x=16$

$$= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\cancel{(x-16)}(\sqrt{x}+4)}{\cancel{x-16}_1} = 8$$

$$\text{f) } \lim_{t \rightarrow 2} \frac{1+\sqrt{t-2}}{t} = \frac{1}{2}$$



$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} \stackrel{\substack{\text{Ind} \\ \text{"0/0"}}}{=} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} \frac{\sqrt{2x-1}+3}{\sqrt{2x-1}+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-1-9} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-10}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\cancel{(x-5)}(\sqrt{2x-1}+3)}{2(\cancel{x-5})} = \frac{6}{2} = 3$$

$$c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{16 + h}}{h} \stackrel{\text{Ind}}{=} \frac{0}{0} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{16 + h}}{h} \cdot \frac{4 + \sqrt{16 + h}}{4 + \sqrt{16 + h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16 - (16 + h)}{h(4 + \sqrt{16 + h})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overset{-1}{\cancel{-h}}}{\cancel{h}(4 + \sqrt{16 + h})}$$

$$= \frac{-1}{8}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{2-x}} \stackrel{\text{Ind}}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{2-x}} \cdot \frac{x - \sqrt{2-x}}{x - \sqrt{2-x}}$$

"0/0"

1^{ère} amplification

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + \sqrt{x+6})(x - \sqrt{2-x})}{x^2 - (2-x)}$$

2^{ème} ampli.

$$\stackrel{\text{"0/0"}}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - \sqrt{2-x})(x + \sqrt{x+6})}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{(x - \sqrt{x+6})}{x - \sqrt{x+6}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - \sqrt{2-x})(x^2 - (x+6))}{(x^2 + x - 2)(x - \sqrt{x+6})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - x - 6)}{(x^2 + x - 2)} \cdot \frac{(x - \sqrt{2-x})}{(x - \sqrt{x+6})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-3)(x - \sqrt{2-x})}{\cancel{(x+2)}(x-1)(x - \sqrt{x+6})}$$

$$= \frac{-5 \cdot (-2-2)}{-3 \cdot (-2-2)} = \frac{-5 \cdot \cancel{(-4)}}{-3 \cdot \cancel{(-4)}} = \frac{5}{3}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}} \quad \begin{array}{c} \text{Ind} \\ \hline \hline \text{"0/0"} \end{array} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1})}{(x+1) - (2x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1})}{x+1 - 2x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1})}{-(\cancel{x-2})}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{-1} = -2\sqrt{3}$$

Théorème des deux gendarmes

Soit deux fonctions f et g définies
au voisinage de $x = a$ et telles que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

Soit h telles que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$
dans un voisinage de a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

2.6.6 Utiliser le théorème « des deux gendarmes » pour déterminer :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{h(x)} = 0 \quad \text{et} \quad b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$a) \quad -x^2 \leq x^2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1} \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

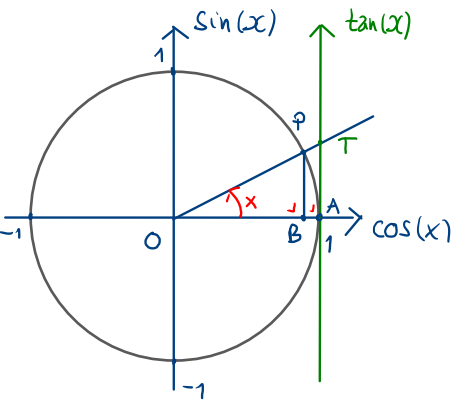
$$b) \quad \begin{array}{ccc} -\sqrt{x} \leq \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sqrt{x} \\ \downarrow \substack{x \rightarrow 0} & & \downarrow \substack{x \rightarrow 0} \\ & & 0 \end{array}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Calcul d'une limite classique

Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

Nous allons calculer la limite à droite



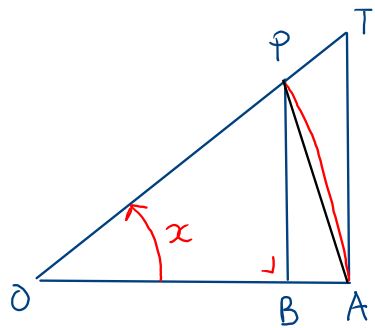
Nous utilisons le cercle trigonométrique et allons comparer des aires.

$$\text{Aire}(\triangle OPA) : \frac{OA \cdot BP}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$$

$$\text{Aire}(\triangle OAT) : \frac{OA \cdot AT}{2} = \frac{\tan(x)}{2}$$

Cherchons l'aire du secteur $\widehat{AOP}$

$$\text{Secteur}(\widehat{AOP}) : \frac{1}{2} x = \frac{x}{2}$$



$$\text{Aire}(\triangle OPA) \leq \text{Secteur}(\widehat{AOP}) \leq \text{Aire}(\triangle OAT)$$

$$\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin(x)} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad | \cdot \sin(x) > 0 \quad \text{car } x > 0$$

$$= \begin{matrix} 1 \\ \downarrow x \rightarrow 0 \\ 1 \end{matrix} \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \begin{matrix} \cos(x) \\ \downarrow x \rightarrow 0 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$