

17.12.25

valeurs interdites

2.8.3 On considère les 12 fonctions rationnelles :

$$\begin{array}{lll}
 \cancel{f_1(x)} = \frac{4x^2}{2x^2 + 1} & \cancel{f_2(x)} = -2x + 5 + \frac{1}{x+1} & \cancel{f_3(x)} = \frac{2x}{x+1} \\
 \cancel{f_4(x)} = \frac{1}{x-7} & \cancel{f_5(x)} = \frac{2x}{x-7} & \cancel{f_6(x)} = \frac{1}{(x+1)(x+10)} \\
 \cancel{f_7(x)} = \frac{1}{(x+1)^2} & \cancel{f_8(x)} = \frac{-2x+5}{x-5} + \frac{1}{x-5} & \cancel{f_9(x)} = 1 + \frac{7}{x^2-4} \\
 \cancel{f_{10}(x)} = 1 + \frac{7}{x^2+4} & \cancel{f_{11}(x)} = -2x + 5 + \frac{1}{x^2+5} & \cancel{f_{12}(x)} = \frac{2x^2}{(x+1)(x+10)}
 \end{array}$$

Asymptote verticale Asymptote horizontale ou oblique

1) $\cancel{f_7}$	$x = -1$	$y = 0$
2) $\cancel{f_{12}}$	$x = -1, x = -10$	$y = 2$
3) $\cancel{f_1}$	aucune	$y = 2$
4) $\cancel{f_5}$	$x = 7$	$y = 2$
5) $\cancel{f_9}$	$x = -2, x = 2$	$y = 1$
6) $\cancel{f_8}$	$x = 5$	$y = -2x + 5$
7) $\cancel{f_3}$	$x = -1$	$y = 2$
8) $\cancel{f_{10}}$	aucune	$y = 1$
9) $\cancel{f_2}$	$x = -1$	$y = -2x + 5$
10) $\cancel{f_4}$	$x = 7$	$y = 0$
11) $\cancel{f_{11}}$	aucune	$y = -2x + 5$
12) $\cancel{f_6}$	$x = -1, x = -10$	$y = 0$

2.8.2 Déterminer l'ensemble de définition et les asymptotes des fonctions f données par :

b) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

x	-1	1
$x^2 - 1$	$+ \quad 0$	$- \quad 0$

1) $ED(k) =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

2) Signe de f : Trouvons ses zéros, s'ils existent.

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = 0$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = -x$$

$$x^2 - 1 = x^2$$

pas de zéro!

! verif. sol

	x	-1	1
$f(x)$	$-$	-1	1

$$f(-1) = -1$$

$$f(1) = 1$$

3) Pas d'AV

4) AH:

à gauche: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 1}) \stackrel{\text{Ind}}{=} \text{"} -\infty + \infty \text{"}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \stackrel{\text{Ind}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \stackrel{\text{Ind}}{=} \text{"} -\infty \cdot 0 \text{"}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})}{(x - \sqrt{x^2 - 1})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}})} \stackrel{\text{"} \frac{1}{-\infty} \text{"}}{=} 0_-$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{AHG: } \gamma = 0} \text{ pure nice!}$$

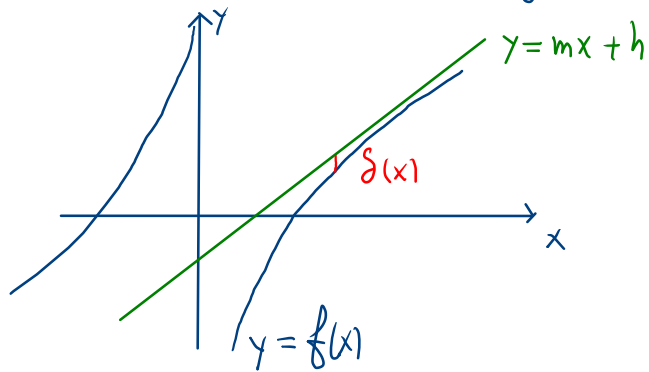
à droite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 - 1}) = +\infty + \infty = +\infty \quad \text{par d'AtD}$$

Pour déterminer les AO, nous avons besoin d'un nouveau résultat,

Méthode générale pour déterminer la AH/AO

Supposons que $y = mx + h$ est une AOD de la courbe $y = f(x)$.



$$S(x) = f(x) - (mx + h)$$

$$S(x) = f(x) - mx - h \quad | \div x \quad (x \neq 0)$$

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - m - \frac{h}{x}$$

$$m = \frac{f(x)}{x} - \frac{h}{x} - \frac{S(x)}{x}$$

En passant à la limite :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{h}{x} - \frac{S(x)}{x} \right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x} = 0$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

De même $h = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - \underbrace{S(x)}_{\rightarrow 0})$

$$h = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$$

Recherche de l'AO à droite

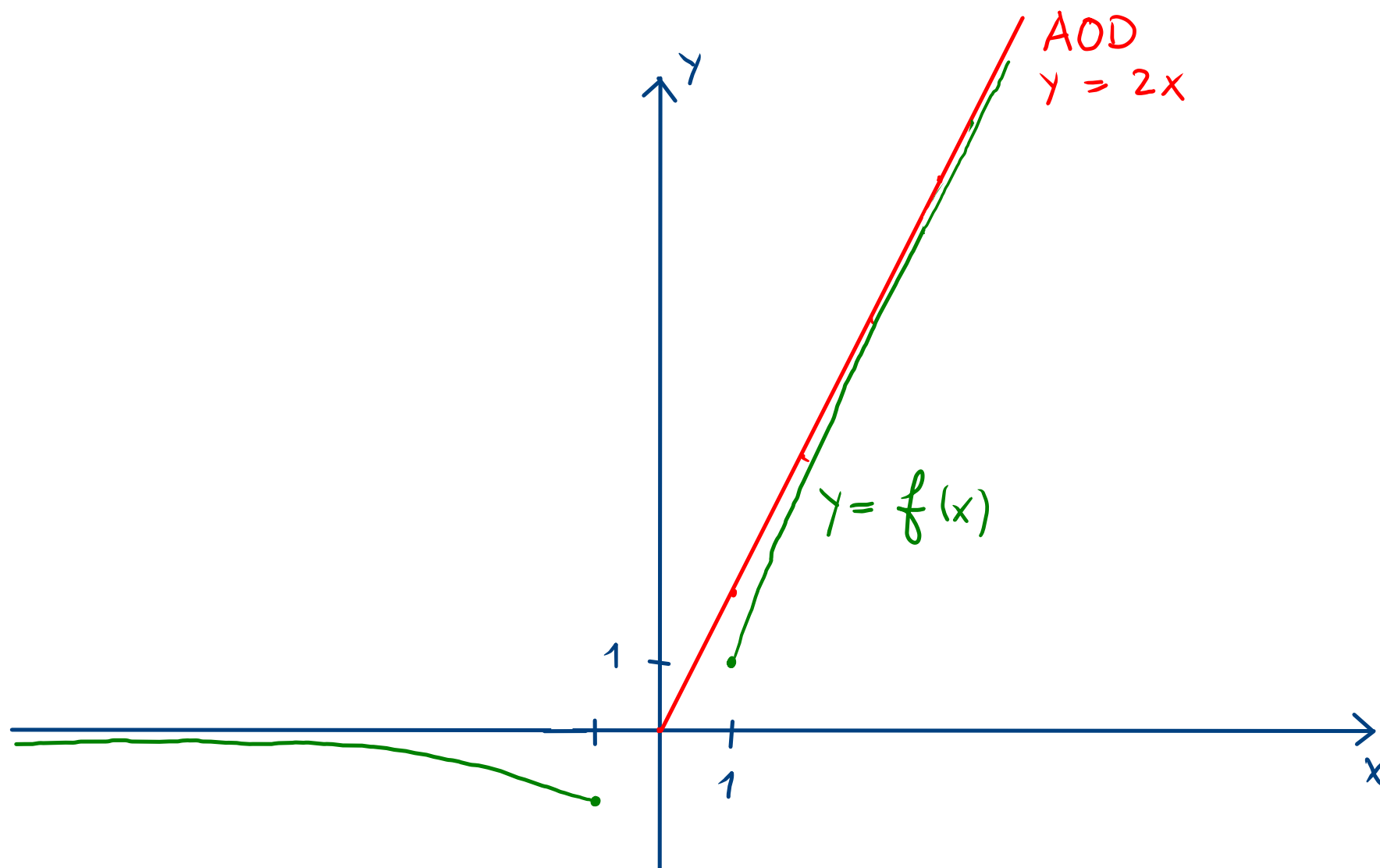
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}^1 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)}{\cancel{x}} = 2$$

$$h = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$$

AOD : $y = 2x$



Position entre l'AOD et la courbe :

$$S(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} - 2x$$

$$S(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x < 0$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = x$$

$$x^2 - 1 = x^2$$

pas de zéro

