

L'ensemble des nombres complexes

$\mathbb{N}$: entiers naturels

$\mathbb{Z}$: entiers relatifs

• $\mathbb{Q}$: fractions

• $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels

Quelles sont les solutions de l'équation $x^2 = -1$?

Dans $\mathbb{R}$, cette équation n'a pas de solution.

Nous allons construire un ensemble de nombres (un corps) dans lequel la condition suivante est vérifiée :

① Toute équation du type $x^2 = m$, où $m \in \mathbb{R}_+^*$ admet une solution dans cet ensemble

La condition (A) est équivalente à la condition (B) suivante

(B) cet ensemble contient un élément dont le carré vaut -1

Désignons cet élément par la lettre i , on a $i^2 = -1$

Montrons l'équivalence des deux conditions :

(A) $\Rightarrow$ (B) : évident

(B) $\Rightarrow$ (A)

Nous avons $i^2 = -1$. Soit $m < 0$, $m \in \mathbb{R}$

$$\left(i \sqrt{-m} \right)^2 = m \Leftrightarrow i \sqrt{-m} \cdot i \sqrt{-m} = i^2 m = -m$$

par ex:

$$\begin{aligned} (2i)^2 &= -4 & \Leftrightarrow & 4i^2 = 4 \cdot (-1) = -4 \\ (-2i)^2 &= -4 & \Leftrightarrow & 4i^2 = 4(-1) = -4 \end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned} x^2 &= -9 \\ x &= \begin{matrix} 3i \\ -3i \end{matrix} \end{aligned}$$

Ce nouvel ensemble se note $\mathbb{C}$. C'est l'ensemble des nombres complexes.

1.1.1 Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $a + bi$:

$$i : i^2 = -1$$

a) $(1 + 4i) + (2 - 3i) = 3 + i$

b) $(8 + 5i) + (-8 - 5i)$

c) $(1 + i) - (2 - 6i)$

d) $(3 - 5i) + (-2 - 4i) - (1 - 2i)$

e) $3(5 - 2i) + 2(7 - i) - 3(4 - 3i)$

f) $(9 + 5i)(2 - 7i) = 18 - 63i + 10i - 35i^2 = 18 + 35 - 53i = 53 - 53i$

g) $(3 + 2i)(3 - 2i)$

h) $(3 - 4i)^2$

salvadore.mathematiques.ch