1.1.7 Poser $z = x + yi$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $8z + 5\bar{z} = 4 + 3i$

~~c) $2\,\Im(\bar{z}+1) + 2i\,\Re(-z+2) = -1 - 12i$~~

b) $z^2 + 2\bar{z} + 5 = 0$

a) $z = x + yi \quad ; \quad \bar{z} = x - yi$

$$8(x+yi) + 5(x-yi) = 4 + 3i$$

$$8x + 8yi + 5x - 5yi = 4 + 3i$$

$$13x + 3yi = 4 + 3i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 13x = 4 \\ 3y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{4}{13} \\ y = 1 \end{cases}$$

D'où la solution $\underline{z = \dfrac{4}{13} + i}$

b) $z^2 + 2\bar{z} + 5 = 0$

Posons $z = x + yi$; on a $\bar{z} = x - yi$.

Calculons $z^2 = (x+yi)(x+yi) = x^2 + xyi + xyi + y^2 i^2$

$= x^2 + 2xyi - y^2$

D'où l'équation :

$$x^2 + 2xyi - y^2 + 2(x - yi) + 5 = 0$$

$$x^2 + 2x + 5 - y^2 + (2xy - 2y)i = 0 \qquad [0 + 0i]$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 5 - y^2 = 0 \\ 2xy - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y(x-1) = 0 \\ x^2 + 2x + 5 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

$$\begin{cases} x = 1 \\ 1 + 2 + 5 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\boxed{z = 1 \pm 2\sqrt{2}i}$$

ou

$$\begin{cases} y = 0 \\ \underbrace{x^2 + 2x + 5}_{\Delta < 0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ \quad \text{pas de solution !}$$

$$S = \{ 1 - 2\sqrt{2}i ; 1 + 2\sqrt{2}i \}$$

- $x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$
- $\sqrt{100} = 10$

1.1.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

c) $(1+2i)z = (5-i)z + 7 + 26i$

$$(1+2i)z - (5-i)z = 7 + 26i$$

$$[1 + 2i - 5 + i]z = 7 + 26i$$

$$(-4+3i)z = 7 + 26i \qquad \div(-4+3i)$$

$$z = \frac{7+26i}{-4+3i} \cdot \frac{-4-3i}{-4-3i}$$

$$z = \frac{-28+78-21i-104i}{25} = \frac{50-125i}{25}$$

$$= \frac{50}{25} - \frac{125}{25}i = 2 - 5i$$

$$S = \{2-5i\}$$

1.1.9 Montrer que si w est une solution de l'équation réelle $az^2 + bz + c = 0$, alors $\bar{w}$ en est une aussi.

Simplifions l'exercice :

Exemple

Résoudre $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$$

pas de solution réelle

$$x_1 = \frac{2+2i}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}i = 1 + i$$

$$x_2 = \frac{2-2i}{2} = \frac{2}{2} - \frac{2}{2}i = 1 - i = \overline{x_1}$$

Si z est une solution d'une équation réelle de degré 2, l'autre solution est le conjugué de z.

Propriétés du conjugué

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes

1) $\bar{z} = 0 \iff z = 0$

2) $\bar{\bar{z}} = z$

3) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$

4) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \overline{z'}$

5) $\overline{-z} = -\bar{z}$

6) $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$ est le module au carré de z

$(a+bi)(a-bi) =$

7) $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

8) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

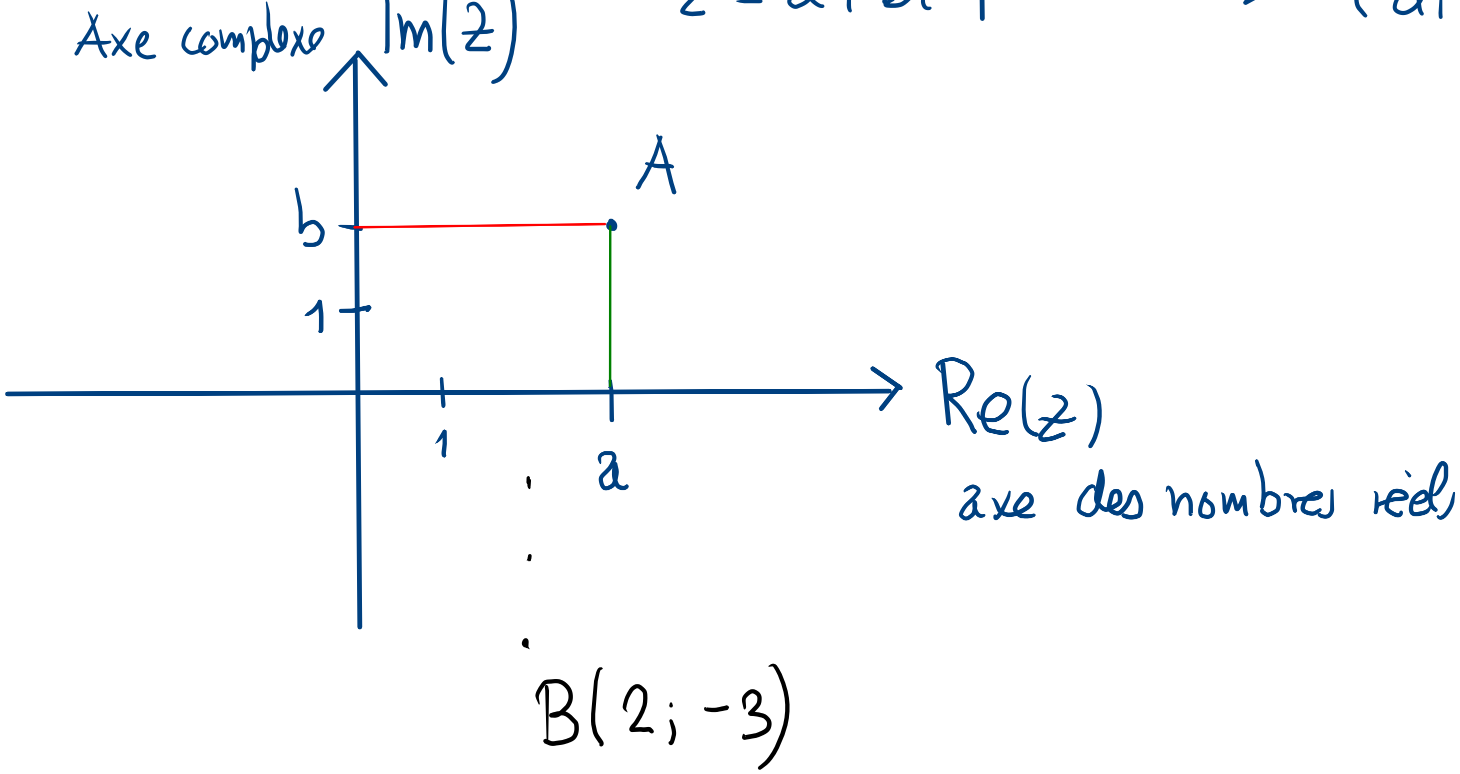
Représentation graphique des nombres complexes

On peut représenter sans ambiguïté un nombre complexe $z = a + bi$ par le couple (a, b)

On a ainsi une application de $\mathbb{C}$ vers le plan

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{E}_2$$

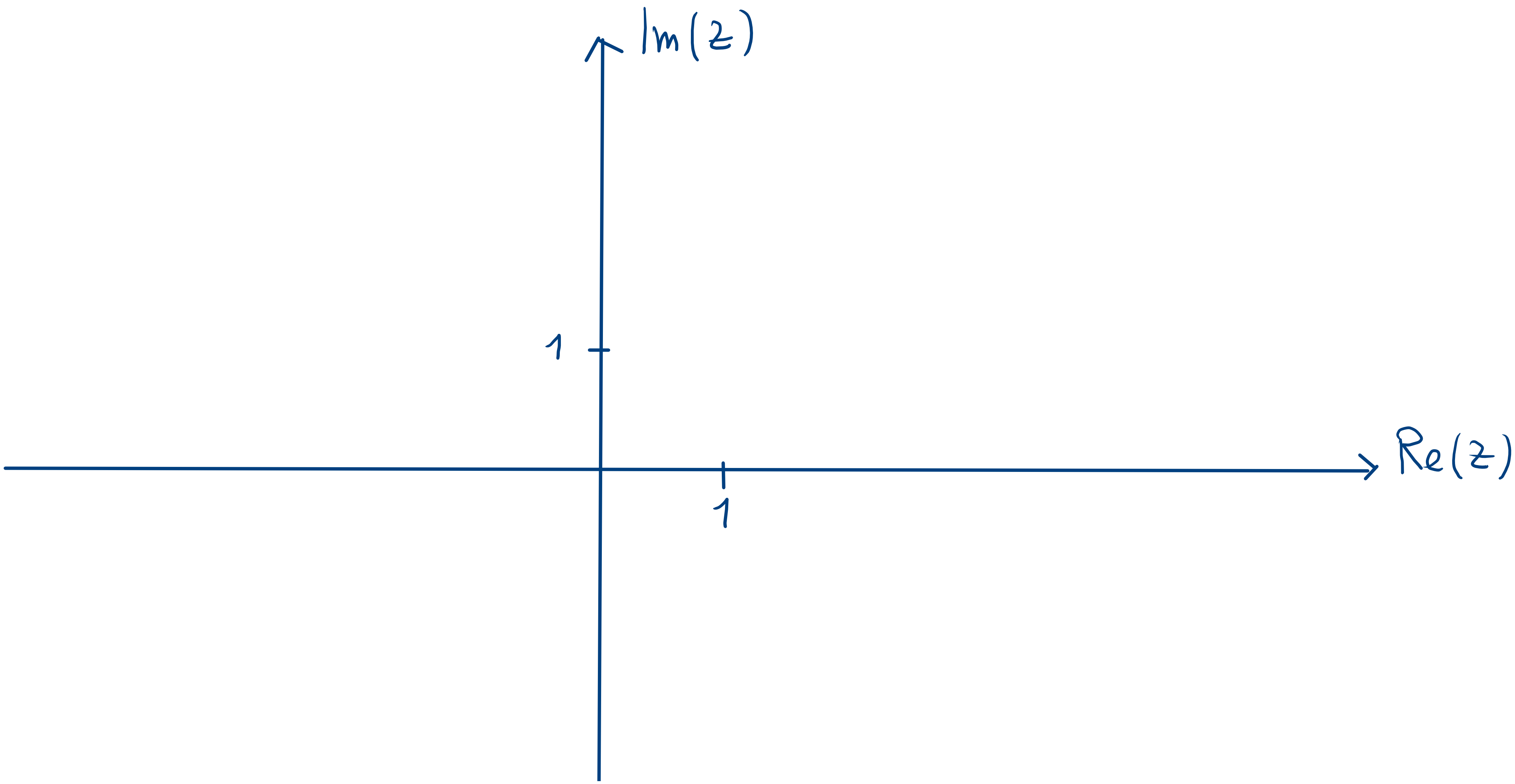
$$z = a + bi \longmapsto (a, b)$$



$$\underbrace{w = 2 - 3i}_{\text{affixe du point } M} \Leftrightarrow M(2; -3)$$

Plan de Gauss

1.2.1 Représenter les points A, B, ..., H dans le plan complexe après avoir calculé, si nécessaire, leurs affixes z_A, z_B, ..., z_H :



1.2.1 Représenter les points A, B, ..., H dans le plan complexe après avoir calculé, si nécessaire, leurs affixes z_A, z_B, ..., z_H :

a) $z_A = 2 - i$

b) $z_B = -3 + 2i$

c) $z_C = z_A + z_B$

d) $z_D = z_A - z_B$

e) $z_E = \dfrac{z_A + \overline{z_A}}{2}$

f) $z_F = \dfrac{z_A - \overline{z_A}}{2} = \dfrac{(2-i)-(2+i)}{2} = \dfrac{-2i}{2} = -i$

g) $z_G = -z_A$

h) $z_H = -\overline{z_A}$