4.2.14 Le modèle de Jenss est généralement considéré comme la formule la plus précise pour prévoir la taille d'un enfant en âge préscolaire. Si y est sa taille en cm et x son âge en années, on a $y = 79,041 + 6,39x - e^{3,261-0,993x}$. Quelle est, d'après ce modèle, la taille d'un enfant d'une année ?

$y = f(x)$

$f(1) =$ [cm]

↑

années

4.2.16 Dans l'étude de 15 villes ayant une population P allant de 300 à 3'000'000 d'habitants, on a déterminé que la vitesse moyenne v (en m/s) d'un piéton pouvait être donnée approximativement par $v = 0,0151 + 0,258 \log(P)$.

a) Selon ce modèle, quel est la vitesse moyenne d'un piéton à Lausanne ($\sim$ 130'000 habitants) ?

a) $V = 1,3 \; [m/s]$

b) Évaluer, à l'aide de cette formule, le nombre d'habitants nécessaire pour que la vitesse moyenne d'un piéton soit de $1,5$ m/s.

$$1,5 = 0,0151 + 0,258 \cdot \log(P) \quad \Big| \; -0,0151$$

$$1,4849 = 0,258 \cdot \log(P) \quad \Big| \; \div 0,258$$

$$5,7554 \cong \log(P)$$

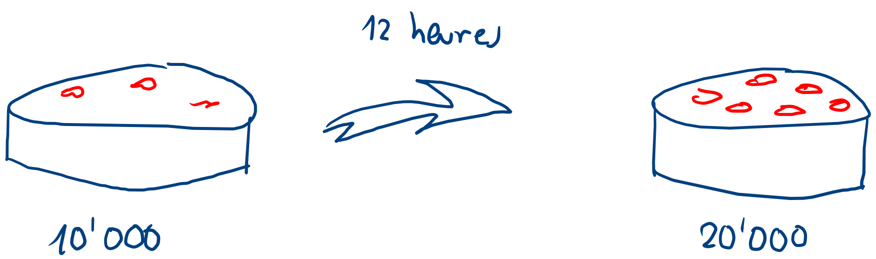
$$10^{5,7554} = P \quad \Rightarrow \quad P = 569'411 \; [\text{habitants}]$$

4.2.19 La population d'une culture bactérienne double toutes les 12 heures. Supposons que la population initiale est de 10'000 bactéries.

a) Déterminer la relation qui représente la taille de la population N après t heures.

b) Combien y aura-t-il de bactéries après une semaine ?

c) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il triplé ?



$t = 0$ [heures] $\qquad t = 12$ [heures]

a)

t [h]	$N = N(t)$
0	10'000
12	20'000
24	40'000
36	80000

$\times 2$ $\quad \times 2$ $\quad \times 2$

$$\boxed{N(t) = 10'000 \cdot 2^{\frac{t}{12}}}$$

Processus exponentielle

c) $N(t) = 30'000 \iff 2^{\frac{t}{12}} = 3$

$$\log\left(2^{t/12}\right) = \log(3)$$

$$\frac{t}{12} \cdot \log(2) = \log(3)$$

$$\frac{t}{12} = \frac{\log(3)}{\log(2)}$$

$$t = 12 \cdot \frac{\log(3)}{\log(2)}$$

$$t \cong 19 \text{ [heures]}$$

$$\boxed{\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)}$$

4.2.20 Un étang contient 1'000 truites. Trois mois plus tard, il n'en reste que 600.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer le nombre N de truites restantes après t mois.

b) Combien y aura-t-il de truites dans l'étang après une année ?

c) Après combien de temps y en aura-t-il plus que 80 ?

a) $N(t) = A\,a^{kt}$

$a = \begin{cases} 10 \\ e \end{cases}$

t	$N(t)$
0	1000
3	600

$A = 1000 \quad \Rightarrow \quad N(t) = 1000\, e^{kt}$

On détermine k:

$$600 = 1000\, e^{3k} \quad \Big|\ \div 1000$$

$$0{,}6 = e^{3k}$$

$$\ln(0{,}6) = 3k$$

$$k = \frac{\ln(0{,}6)}{3}$$

Donc $\boxed{N(t) = 1000\, e^{\ln(0{,}6)/3\ t}}$

$$= 1000 \underbrace{\left(e^{\ln(0{,}6)}\right)}^{\frac{t}{3}}$$

$$\boxed{N(t) = 1000 \cdot 0{,}6^{\frac{t}{3}}}$$

b) Combien y aura-t-il de truites dans l'étang après une année ?

c) Après combien de temps y en aura-t-il plus que 80 ?

b) $N(12) = 129$ [truites]

c) $80 = 1000 \cdot 0{,}6^{\frac{t}{3}}$

$$\frac{8\cancel{0}}{100\cancel{0}} = 0{,}6^{\frac{t}{3}}$$

$$0{,}08 = 0{,}6^{\frac{t}{3}}$$

$$\ln(0{,}08) = \frac{t}{3}\ln(0{,}6) \Rightarrow t = 3 \cdot \frac{\ln(0{,}08)}{\ln(0{,}6)} \cong 14{,}8 \text{ [mois]}$$

4.2.22 On place un capital C à un taux d'intérêt annuel i pendant une durée de n années et on obtient le montant C_n. Remplir le tableau ci-dessous :

C	i	n	C_n
4'720.–	3,5%	12 ans	
	3,5%	24 ans	5'388.65
9'440.–	3,5%		11'604.17
790.–		72 ans	9'404.43

Intérêts simples

Intérêts $\quad 12 \cdot \underbrace{4720 \cdot \frac{3,5}{100}}_{1 \text{ année}} = 1982,40$ [CHF]

Intérêts composés

n	C_n
0	$4720 = C_0$
1	$C_1 = 0,035 \cdot 4720 + 4720 = 4720\,(0,035+1) = 1,035 \cdot 4720$
2	$C_2 = 1,035 \cdot 4720 + 1,035 \cdot 4720 \cdot 0,035$
	$= 1,035 \cdot 4720\,(1+0,035) = 1,035^2 \cdot 4720$

$$C_n = 1,035^n \cdot 4720$$

$$\boxed{C_n = C_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n}$$

C_0 : capital initial

t : taux en %

n : nombre d'années

C_n : capital après n années