28.11.25

2.6.17 Calculer, si elles existent, $\lim_{x\to-\infty}$ et $\lim_{x\to+\infty}$ pour les fonctions f suivantes :

a) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$ b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2-4x+3}}{x+1}$

a) Déterminons ED(f)

Condition : $x^2+x+1=0$

$\Delta = 1-4=-3<0 \quad \Rightarrow \quad x^2+x+1>0$

• limite à gauche :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+x+1}}_{\to+\infty}-x\right)=+\infty-(-\infty)=+\infty+\infty=+\infty$$

• limite à droite :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\underset{\text{“}+\infty-\infty\text{”}}{\overset{\text{Ind}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{|x|}_{+\infty}\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}_{\to1}=+\infty\cdot1=+\infty$$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2-4x+3}}{x+1}$

1) Recherche de ED:

Conditions : $x \neq -1$

$4x^2-4x+3 \geq 0$

$\Delta = 16-4\cdot4\cdot3 = -32 < 0 \Rightarrow 4x^2-4x+3>0$

$ED(f) = \mathbb{R}-\{-1\}$

2) limite à gauche:

$$\begin{array}{ccccc} -4 & \longrightarrow & 16 & \longrightarrow & 4 \\ x & & x^2 & & -x \end{array}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-4x+3}}{x+1} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{-\infty}\text{"}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{4x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|2x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{4x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{4x^2}}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -2$$

3) limite à droite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{4x^2}}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 2$$

c) $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4}$

• Ensemble de définition

1) $x^2+2x>0$

$x(x+2)>0$

x		-2		0	
x^2+2x	$+$	0	$-$	|	$+$

2) $x^2+4>0$

$ED(f)=\left]-\infty;-2\right]\cup\left[0;+\infty\right[$

• limite à gauche

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4}\ \underset{+\infty-\infty}{\overset{\text{Ind}}{=}}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$|x|$ $|x|$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2+4)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}+|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(2-\frac{4}{x}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)}=\frac{2}{-2}=-1$$

• limite à droite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(2-\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)}=\frac{2}{2}=1$$

d) $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{4x^2+2x-5}}{x+3}$

① Signe de $4x^2 + 2x - 5$:

$\Delta = 4 + 80 = 84 = 4 \cdot 21$

zéros : $\dfrac{-2 \pm 2\sqrt{21}}{8} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{4}$ $<$ $\alpha_1 = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{21})$; $\alpha_2 = \frac{1}{4}(-1-\sqrt{21})$

x		α_2		α_1	
$4x^2+2x-5$	$+$	0	$-$	0	$+$

$ED(f) =]-\infty; -3[\cup]-3; \alpha_2] \cup [\alpha_1; +\infty[$

② $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2+2x-5}}{x+3} \underset{\frac{+\infty-(+\infty)}{+\infty}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2(1+\dots)}}{x(1+\dots)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - 2x\sqrt{1+\dots}}{x(1+\dots)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x}(1-\sqrt{1+\dots})}{\cancel{x}(1+\dots)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(1-\sqrt{1+\dots})}{1+\dots}$$

$$= 0$$

③ $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2+2x-5}}{x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x + 2x\sqrt{1+\dots}}{x(1+\dots)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\cancel{x}(1+\sqrt{1+\dots})}{\cancel{x}(1+\dots)}$$

$$= \frac{2\cdot 2}{1} = 4$$

e) $f(x) = 2x - \cos(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2x - \underbrace{\cos(x)}_{\in [-1;1]}\right) = \lim_{x \to -\infty} (2x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \cos(x)\right) = \lim_{x \to +\infty} (2x) = +\infty$$

f) $f(x) = \dfrac{2x - \cos(x)}{x - 1}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x - \cos(x)}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - \cos(x)}{x-1} = 2$$

g) $$\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

changement de variables $\quad \frac{1}{x} = t$

$x = \frac{1}{t}$

$x \to +\infty \; ; \; t \to 0_+$

$$\lim_{x \to -\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ <}} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

h) $$\lim_{x \to \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$