

**Nombres complexes 1 – TE 858A**

| Problème       | 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | Total |
|----------------|---|---|---|----|---|-------|
| Points         | 8 | 4 | 8 | 10 | 6 | 36    |
| Points obtenus |   |   |   |    |   |       |

**Problème 1** (8 points)Mettre sous forme algébrique  $a + bi$  les quatre nombres complexes suivants :

a)  $z_1 = 4(3 - 2i) - 4i(2 - 3i)$

c)  $z_3 = \frac{(3 + 5i)^2}{1 - 2i}$

b)  $z_2 = (1 - 2i)^2 - \overline{(4 - 3i)(5 + 2i)}$

d)  $z_4 = [4; \pi] + [3; \frac{3\pi}{2}]$

$$a) \quad z_1 = \underline{12 - 8i} - \underline{8i + 12i^2} = \underline{-16i}$$

$$b) \quad z_2 = 1 - 4 - 4i - \overline{(20 + 8i - 15i + 6)}$$

$$= -3 - 4i - \overline{(26 - 7i)} = -3 - 4i - 26 + 7i = \underline{-29 + 3i}$$

$$c) \quad z_3 = \frac{9 + 30i - 25}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{(-16 + 30i)(1 + 2i)}{5}$$

$$= \frac{-16 - 32i + 30i - 60}{5} = \underline{\underline{-\frac{76}{5} - \frac{2}{5}i}}$$

$$d) \quad z_4 = \underline{-4 - 3i}$$

---

**Problème 2** (4 points)

On pose  $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ .

a) Donner  $z$  sous forme trigonométrique.

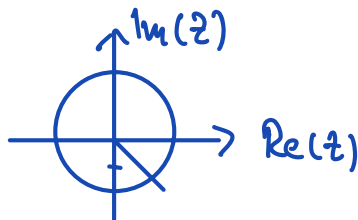
b) Calculer  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^4$  et donner la réponse sous forme algébrique.

$$a) \quad |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$z = \left[1; \frac{7\pi}{4}\right]$$



$$b) \quad z^4 = \left[1; 7\pi\right] = \left[1; \pi\right] = -1$$

---

**Problème 3** (8 points)

On sait d'un nombre complexe  $z$  que l'une des ses racines cubiques est donnée par  $w = \left[4; \frac{5\pi}{6}\right]$ .

a) Donner le nombre complexe  $z$  sous forme algébrique.

b) Donner sous forme algébrique toutes les autres racines cubiques de  $z$ .

$$a) \quad w^3 = z \quad \Leftrightarrow \quad z = \left[64; \frac{5\pi}{2}\right] = \left[64; \frac{\pi}{2}\right] = 64i$$

$$b) \quad w = [r, \theta] \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 64 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 4 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\underline{k=0:} \quad z_0 = \left[4, \frac{\pi}{6}\right] = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \underline{2\sqrt{3} + 2i}$$

$$\underline{k=1:} \quad z_1 = \left[4; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right] = \left[4; \frac{5\pi}{6}\right] = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ = \underline{-2\sqrt{3} + 2i} = w$$

$$\underline{k=2:} \quad z_2 = \left[4; \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right] = \left[4; \frac{9\pi}{6}\right] = \left[4; \frac{3\pi}{2}\right] = \underline{-4i}$$

---

**Problème 4** (10 points)Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les deux équations suivantes.

a)  $2z + 3\bar{z} = 10 - i$

b)  $z^2 - (1 + 6i)z + 5i - 5 = 0.$

a) Posons  $z = a + bi$  ;  $\bar{z} = a - bi$

$$2z + 3\bar{z} = 10 - i$$

$$2a + 2bi + 3a - 3bi = 10 - i$$

$$5a - bi = 10 - i \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 10 \\ -b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2 \text{ et } b = 1$$

$$\underline{S = \{2 + i\}}$$

b) 
$$D = (1 + 6i)^2 - 4(-5 + 5i)$$
$$= -35 + 12i + 20 - 20i = -15 - 8i = (a + bi)^2 = d^2$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ a^2 + b^2 = 17 \\ 2ab = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 4 \\ ab = -4 \end{cases}$$

$$d_1 = 1 - 4i \quad \text{ou} \quad d_2 = -1 + 4i$$

$$z_1 = \frac{1 + 6i + 1 - 4i}{2} = 1 + i \quad ; \quad z_2 = \frac{1 + 6i - 1 + 4i}{2} = 5i$$

$$\underline{S = \{1 + i ; 5i\}}$$

---

**Problème 5** (6 points)

Résoudre dans  $\mathbb{C}^2$  le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} z - iw = -i \\ w - iz = 1 + i \end{cases}$$

$$\begin{cases} z - iw = -i \\ -iz + w = 1 + i \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} w \\ \cdot 1 \\ i \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} z \\ i \\ 1 \end{array} \right|$$

①      ②

$$\begin{array}{rcl} z - iw & = & -i \\ z + iw & = & i - 1 \\ \hline 2z & = & -1 \Leftrightarrow \underline{z = -\frac{1}{2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} iz + w & = & 1 \\ -iz + w & = & 1 + i \\ \hline 2w & = & 2 + i \\ \underline{w = 1 + \frac{1}{2}i} \end{array}$$

La solution du système:  $z = -\frac{1}{2}$   
 $w = 1 + \frac{1}{2}i$