

**Nombres complexes 1 – TE 858B**

| Problème       | 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | Total |
|----------------|---|---|---|----|---|-------|
| Points         | 8 | 4 | 8 | 10 | 6 | 36    |
| Points obtenus |   |   |   |    |   |       |

**Problème 1** (8 points)Mettre sous forme algébrique  $a + bi$  les quatre nombres complexes suivants :

a)  $z_1 = 3(3 - 4i) - 3i(3 - 2i)$

c)  $z_3 = \frac{(3 - 5i)^2}{1 + 2i}$

b)  $z_2 = (1 - 3i)^2 - \overline{(3 + 4i)(2 - 5i)}$

d)  $z_4 = [3; \pi] + [4; \frac{3\pi}{2}]$

$$a) \quad z_1 = 9 - 12i - 9i + \underbrace{6i^2}_{-6} = \underline{3 - 21i}$$

$$b) \quad z_2 = 1 - 9 - 6i - \left( \overbrace{6 - 15i + 8i - 20i^2}^{20} \right)$$

$$= -8 - 6i - \left( \underbrace{26 - 7i}_{26 + 7i} \right) = \underline{-34 - 13i}$$

$$c) \quad z_3 = \frac{9 - 30i + 25i^2}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{(-16 - 30i)(1 - 2i)}{5}$$

$$= \frac{-16 + 32i - 30i + 60i^2}{5} = \underline{\underline{\frac{-76}{5} + \frac{2}{5}i}}$$

$$d) \quad z_4 = \underline{-3 - 4i}$$

---

**Problème 2** (4 points)

On pose  $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ .

a) Donner  $z$  sous forme trigonométrique.

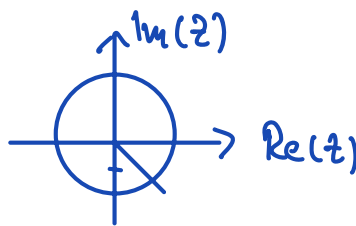
b) Calculer  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^4$  et donner la réponse sous forme algébrique.

$$2) \quad |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$z = \left[1; \frac{7\pi}{4}\right]$$



$$b) \quad z^4 = \left[1; 7\pi\right] = \left[1; \pi\right] = -1$$

---

**Problème 3** (8 points)

On sait d'un nombre complexe  $z$  que l'une des ses racines cubiques est donnée par  $w = \left[ 2; \frac{5\pi}{3} \right]$ .

a) Donner le nombre complexe  $z$  sous forme algébrique.

b) Donner sous forme algébrique toutes les autres racines cubiques de  $z$ .

$$a) \quad w^3 = z \Leftrightarrow z = \left[ 8; 5\pi \right] = \left[ 8; \pi \right] = \underline{-8}$$

$$b) \quad w = [r, \theta] \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\underline{k=0}: \quad z_0 = \left[ 2; \frac{\pi}{3} \right] = 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \underline{1 + \sqrt{3}i}$$

$$\underline{k=1}: \quad z_1 = \left[ 2; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right] = [2, \pi] = \underline{-2}$$

$$\underline{k=2}: \quad z_2 = \left[ 2; \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right] = \left[ 2; \frac{5\pi}{3} \right] = \underline{1 - \sqrt{3}i}$$

---

**Problème 4** (10 points)Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les deux équations suivantes.

a)  $2z - 3\bar{z} = 1 + 10i$

b)  $z^2 + (1 + 6i)z + 5i - 5 = 0.$

a) Posons  $z = a + bi$  ;  $\bar{z} = a - bi$

$$2z - 3\bar{z} = 1 + 10i$$

$$2a + 2bi - 3a + 3bi = 1 + 10i$$

$$-a + 5bi = 1 + 10i \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ 5b = 10 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\underline{S = \{-1 + 2i\}}$$

b)  $D = (1 + 6i)^2 - 4(-5 + 5i)$   
$$= -35 + 12i + 20 - 20i = -15 - 8i = (a + bi)^2 = d^2$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ a^2 + b^2 = 17 \\ 2ab = -8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 4 \\ ab = -4 \end{cases}$$

$$d_1 = 1 - 4i \quad \text{ou} \quad d_2 = -1 + 4i$$

$$z_1 = \frac{-1 - 6i + 1 - 4i}{2} = -5i \quad ; \quad z_2 = \frac{-1 - 6i - 1 + 4i}{2} = -1 - i$$

$$\underline{S = \{-1 - i, -5i\}}$$

---

**Problème 5** (6 points)

Résoudre dans  $\mathbb{C}^2$  le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} z - iw = -i \\ w - iz = 1 + i \end{cases}$$

$$\begin{cases} z - iw = -i \\ -iz + w = 1 + i \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} w & z \\ \hline \cdot 1 & i \\ i & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z - iw = -i \\ z + iw = i - 1 \\ \hline 2z = -1 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} iz + w = 1 \\ -iz + w = 1 + i \\ \hline 2w = 2 + i \\ w = 1 + \frac{1}{2}i \end{array}$$

La solution du système:  $z = -\frac{1}{2}$   
 $w = 1 + \frac{1}{2}i$