2M7 DF – Mercredi 23 octobre 2026 Nom & prénom : .....

Nombres complexes 2 – TE 860A

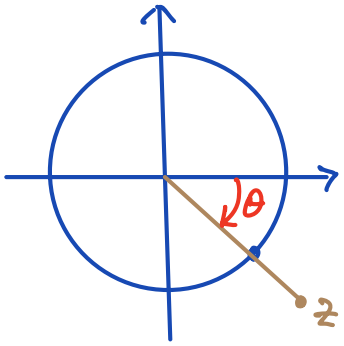
Problème	1	2	3	4	Total
Points	4	5	9	5	23
Points obtenus					

Problème 1 (4 points)

a) Écrire sous la forme $z = r \cdot e^{i\theta}$ le nombre complexe $z = 3 - 3\,i$.

b) Écrire sous la forme $w = a + i\,b$ le nombre complexe $w = 4\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

a)



$|z| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\cos(\theta) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\theta) = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Big\} \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$

$z = 3\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b) $w = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)i\right) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

Problème 2 (5 points)

Soit le polynôme q de $\mathbb{C}[z]$: $q = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$

a) Sachant que les nombres 2 i et $1 - i$ sont des zéros de q, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8 = 0$

b) Factoriser le polynôme q dans $\mathbb{C}[z]$.

c) Factoriser le polynôme q dans $\mathbb{R}[z]$.

a) $\overline{2i}$ et $\overline{1-i}$ sont des zéros.

$S = \{2i, -2i, 1-i, 1+i\}$

b) $q = (z-2i)(z+2i)(z-(1-i))(z-(1+i))$

c) $q = (z^2+4)(z^2-(1+i)z-(1-i)z+(1-i)(1+i))$

$q = (z^2+4)(z^2-2z+2)$

Problème 3 (9 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 - 5z^3 + (14+3\,\mathrm{i})z^2 - (13+16\,\mathrm{i})z - (3-11\,\mathrm{i}) = 0$$

P

sachant que $z = \mathrm{i}$ et $z = 2-3\,\mathrm{i}$ sont des solutions de cette équation.

a) Par Horner :

	1	-5	$14+3i$	$-13-16i$	$-3+11i$
i		i	$-1-5i$	$2+13i$	$3-11i$
	1	$-5+i$	$13-2i$	$-11-3i$	0

$$P = (z^3 + (-5+i)z^2 + (13-2i)z + (-11-3i)(z-i)$$

b) Par Horner

	1	$-5+i$	$13-2i$	$-11-3i$
$2-3i$		$2-3i$	$-12+5i$	$11+3i$
	1	$-3-2i$	$1+3i$	0

$$(2-3i)(-3-2i) = -6 - 4i + 9i - 6 = -12 + 5i$$
$$(2-3i)(1+3i) = 2 + 6i - 3i + 9 = 11 + 3i$$

$$P = (z^2 + (-3-2i)z + 1+3i)(z-(2-3i))(z-i)$$

c) On résout $z^2 + (-3-2i)z + (1+3i) = 0$

$$\Delta = (-3-2i)^2 - 4(1+3i) = 9 - 4 + 12i - 4 - 12i$$
$$= 1$$

Les solutions sont : $z = \dfrac{3+2i \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{4+2i}{2} = 2+i \\ \dfrac{2+2i}{2} = 1+i \end{cases}$

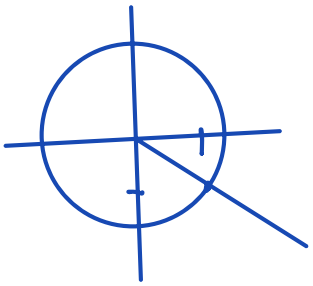
$S = \{ i ; 2-3i ; 2+i ; 1+i \}$

Problème 4 (5 points)

$$(\sqrt{3}-i)^7 = 2^7 e^{-i\frac{7\pi}{6}} = 128\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

$$w = \sqrt{3}-i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$\cdot\ w^7 = 128\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -64\sqrt{3} + 64i$$