

Résolution des équations par radicaux

① $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$

② $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, $x = ?$ possible

③ $ax^4 + \dots = 0$, $a \neq 0$, $x = ?$ possible

$ax^5 + \dots = 0$, $a \neq 0$, impossible

Jérôme cardan

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$



L'ensemble des nombres complexes

$$\mathbb{N} < \mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R}$$

$\mathbb{N}$: entiers naturels

$\mathbb{Z}$: entiers relatifs

$\mathbb{Q}$: ensemble des fractions

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels

Quelles sont les solutions de l'équation

$$x^2 = -1 \quad ?$$

Dans $\mathbb{R}$, cette équation n'a pas de solution

Nous allons construire un ensemble (en un corps) dans lequel la condition suivante est vérifiée :

Ⓐ Toute équation du type $x^2 = m$, où $m \in \mathbb{R}_+^*$ admet une solution dans cet ensemble.

La condition Ⓐ est équivalente à la condition suivante

Ⓐ' cet ensemble contient un élément dont le carré vaut -1 .

Désignons cet élément par la lettre i . $[x^2 = -1]$

$$i^2 = -1$$

Montrons l'équivalence des deux conditions:

$$\textcircled{A} \Rightarrow \textcircled{A'} \quad \text{évident}$$

$$\textcircled{A'} \Rightarrow \textcircled{A} : \text{démontrons l'équivalence.}$$

Nous avons $i^2 = -1$.

$$(i\sqrt{-m})^2 = i^2 \cdot (-m) = -1 \cdot (-m) = m$$

Remarquons que $(-i\sqrt{-m})^2 = i^2 \cdot (-m) = -1 \cdot (-m) = m$

$$x^2 = -9$$

$$x^2 = \underbrace{-1}_{i^2} \cdot 9$$

$$x^2 = i^2 \cdot 9$$

$$\Rightarrow x^2 = 9i^2$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} -3i \\ 3i \end{pmatrix}$$

Cet ensemble, noté $\mathbb{C}$, s'appelle l'ensemble des nombres complexes.

Un nombre complexe s'écrit :

$$Z = \underbrace{a}_{\text{partie réelle}} + \underbrace{b}_{\text{partie imaginaire}} \cdot i$$

partie réelle partie imaginaire

Exemples : $z_1 = 4$, $z_2 = \frac{-\sqrt{2}}{4}$, $z_3 = 5i$, $z_4 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_5 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

Règles de calculs

$$1) (\underline{2} - \underline{3i}) + (\underline{4} + \underline{4i}) = 6 + i$$

$$2) (\underline{2} - \underline{3i}) - (\underline{4} + \underline{4i}) = -2 + (-7)i = -2 - 7i$$

$$3) (\underline{2} - \underline{3i})(\underline{4} + \underline{4i}) = 8 + 8i - 12i + \underbrace{(-3i)(4i)}_{-12i^2 = 12} = 20 - 4i$$

$$4) \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i \quad \boxed{\frac{1}{i} = -i}$$

$$5) \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\boxed{\frac{1+i}{1-i} = i}$$

1.1.1 Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $a + bi$:

b) $(8 + 5i) + (-8 - 5i) = 0$

k) $\frac{1}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} = \frac{2 - 3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13$$

i) $(1 + i)^4 = \left((1 + i)^2\right)^2 = (1 + 2i - 1)^2 = 4i^2 = -4$

n) $\left(\frac{63 + 16i}{4 + 3i}\right)^2 = (12 - 5i)^2 = 144 - 25 - 120i = 119 - 120i$

$$\begin{aligned} \frac{63 + 16i}{4 + 3i} \cdot \frac{4 - 3i}{4 - 3i} &= \frac{252 + 48 + (-189 + 64)i}{25} \\ &= \frac{300 - 125i}{25} = 12 - 5i \end{aligned}$$

1.1.2 Calculer $i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, \dots$ En déduire une formule générale pour i^n , avec $n \in \mathbb{N}$.

$$\underline{i^0 = 1}$$

$$\underline{i^1 = i}$$

$$\underline{i^2 = -1}$$

$$\underline{i^3 = i^2 \cdot i = -i}$$

$$\underline{i^4 = 1}$$

$$\underline{i^5 = i}$$

$$\underline{i^6 = -1}$$

$$\underline{i^7 = -i}$$

$$\underline{i^8 = 1}$$

$$\underline{i^9 = i}$$

$$\underline{i^{10} = -1}$$

$$\underline{i^{11} = -i}$$

$$\underline{i^4 = i - (-i) = i^2 = 1}$$

$$\underline{i^{4n} = 1}$$

$$\underline{i^{4n+1} = i}$$

$$\underline{i^{4n+2} = -1}$$

$$\underline{i^{4n+3} = -i}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

1.1.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $2z - 3 + i = 0$

c) $(1 + 2i)z = (5 - i)z + 7 + 26i$

b) $(1 - 4i)z = 6 - 7i$

1.1.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} (2+i)z + (2-i)w = 7-4i \\ (1+i)z - iw = 2+i \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2+i)z + (2-i)w = 7-4i \\ (1+i)z - iw = 2+i \end{cases}$$

$$z = ? \quad w = ?$$