

Terminologie

Nous connaissons : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
 $[a, b]$, $] -\infty ; 2[$, ...

Soit S un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

a) $m \in S$ est un minimum si $\forall x \in S$, $m \leq x$

b) $M \in S$ est un maximum si $\forall x \in S$, $M \geq x$

c) $a \in \mathbb{R}$ est un minorant si $\forall x \in S$, $a \leq x$

d) $b \in \mathbb{R}$ est un majorant si $\forall x \in S$, $b \geq x$

e) $\alpha \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure (infimum) de S
 si $\forall x \in S$, $x \geq \alpha$ et $\forall \varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon > 0$, $x_\varepsilon \in S$
 tel que $x_\varepsilon - \alpha \leq \varepsilon$.

f) $\beta \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure (supremum) de S
 si $\forall x \in S$, $x \leq \beta$ et $\forall \varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon > 0$, $x_\varepsilon \in S$
 tel que $\beta - x_\varepsilon \leq \varepsilon$

g) S est un ensemble borné s'il admet à la fois
 un minorant et un majorant

Exemple

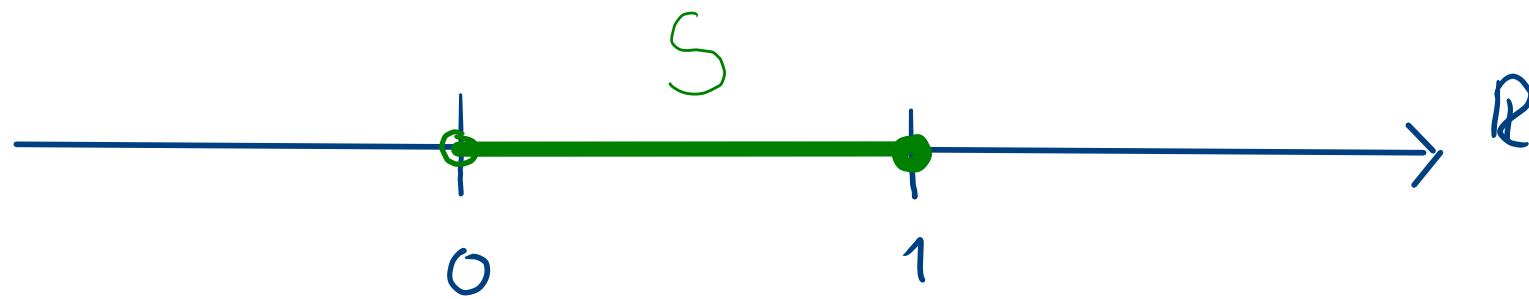
① $S_1 = \mathbb{N}$

② $S_2 = [0; 1]$ ③ $S_3 =]0; 1]$, $S_4 = [0; 1[$, $S_5 =]0; 1[$

⑥ $S_6 = \{ p \mid p \text{ est premier} \}$

	min	max	{minorant}	{majorant}	inf	sup
S_1	0	—	$] -\infty; 0]$	—	0	—
S_2	0	1	$] -\infty; 0]$	$[1; +\infty[$	0	1
S_3	—	1	$] -\infty; 0]$	$[1; +\infty[$	0	1
S_4	0	—	$] -\infty; 0]$	$[1; +\infty[$	0	1
S_5	—	—	$] -\infty; 0]$	$[1; -\infty[$	0	1
S_6	2	—	$] -\infty; 2]$	—	2	—

$$S =] 0; 1]$$



$$]-\infty; 0]$$

$$m = 0,000001$$

$$\frac{m}{2}$$

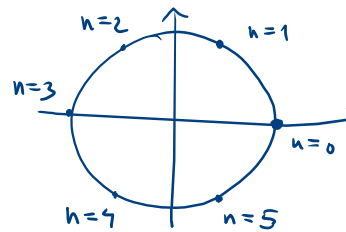
2.1.1 Pour chacun des ensembles S ci-dessous, trouver, s'ils existent, le minimum, le maximum, l'ensemble des minorants, l'ensemble des majorants, la borne inférieure et la borne supérieure :

- a) $[0; 1]$ ✓ b) $]0; 1[$ ✓ c) $\{2; 7\}$ $] -\infty; 2]$ d) $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$
- e) $\{0\}$ f) $[0; 1] \cup [2; 3]$ g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ h) $\{0; 1; 2; 4; 8; 16\}$
- i) $\left\{\frac{1}{p} \mid p \text{ premier}\right\}$ j) $\{x^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ k) $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ l) $\{2x - x^2 \mid x \in [2; +\infty[\}$

$$i) S_i = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \dots\right\} \subset]0; \frac{1}{2}]$$

	min	max	{minorant}	{majorant}	inf	sup
i)	—	$\frac{1}{2}$	$] -\infty; 0]$	$[\frac{1}{2}; +\infty[$	0	$\frac{1}{2}$
k)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$] -\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}]$	$[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty[$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
l)	—	0	—	$\mathbb{R}_+$	—	0

$$k) S_k = \left\{0; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

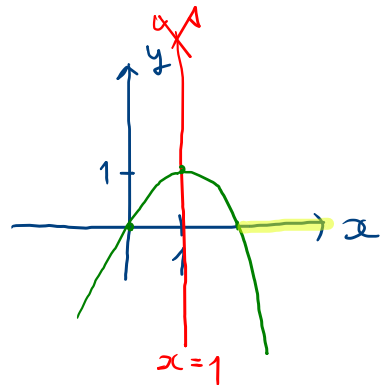


$$l) f(x) = -x^2 + 2x$$

$$= -x(x-2)$$

$\downarrow$
0

$\downarrow$
2



$$S_l =] -\infty; 0]$$

2.1.4 Écrire l'expression $a - |a - |a||$ sans utiliser de valeur absolue.

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

1°) $a \geq 0$:

$$a - |a - |a|| = a - \underbrace{|a - a|}_0 = a$$

2°) $a < 0$:

$$a - |a - |a|| = a - |a - (-a)| = a - \underbrace{|2a|}_{<0} = a - (-2a) = 3a$$

Conclusion :

$$a - |a - |a|| = \begin{cases} a & , \quad \text{si } a \geq 0 \\ 3a & , \quad \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$