

Un nombre complexe s'écrit

$$z = a + b \cdot i$$

a est la partie réelle de z : $a = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$

b est la partie imaginaire de z : $b = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$

Propriétés

① $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$
 $0 + 0i = 0$ est l'élément neutre de $\mathbb{C}$ pour l'addition

② $(a + bi) + (-a - bi) = 0$

$(7 - 2i) + (-7 + 2i) = 0$

$-a - bi$ est l'opposé de $a + bi$

③ $(\underline{a} + bi) + (\underline{c} + di) = (\underline{a} + \underline{c}) + (\underline{b} + \underline{d})i$

$(\mathbb{C}, +)$

④ $(a + bi) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{multiplication} \\ \text{complexe}}}{(c + di)} = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$

⑤ $z = a + bi$, on note $\bar{z}$ le conjugué de z .
 $\bar{z} = a - bi$

Ex: $z = 4 - 3i$, $\bar{z} = 4 + 3i$ $(4 - 3i) - (4 + 3i) = -6i$

⑤.1 $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$; $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z) i$

⑤.2 $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

⑤.3 $\overline{\bar{z}} = z$

⑥ Le nombre $\sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ est le module de z .

$$\textcircled{7} \quad (a+bi) \cdot (c+di) = a+bi$$

$$(a+bi) \cdot (1+0i) = a+bi$$

$1+0i = 1$ est l'élément neutre de $\mathbb{C}$

$$\textcircled{8} \quad (a+bi) \underbrace{(c+di)}_{\text{est l'inverse de } a+bi} = 1$$

Soit $z \in \mathbb{C}$, déterminons z' tel que $z \cdot z' = 1$

Exemple : $z = 4+3i$

$$(4+3i) \cdot \frac{1}{4+3i} = 1$$

$$\frac{1}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{4-3i}{25} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i \quad \text{est l'inverse de } 4+3i$$

$$\begin{aligned} \text{Preuve: } (4+3i) \left(\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i \right) &= (4+3i) \cdot \frac{1}{25} (4-3i) \\ &= \frac{1}{25} (4+3i)(4-3i) = \frac{1}{25} \cdot 25 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{L'inverse de } z = a+bi \quad \text{est} \quad \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i, \quad z \neq 0$$

1.1.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $2z - 3 + i = 0$

c) $(1 + 2i)z = (5 - i)z + 7 + 26i$

$$\begin{array}{lcl} \text{c)} & (1 + 2i) \underline{z} = (5 - i) \underline{z} + 7 + 26i & \\ & (1 + 2i) \underline{z} - (5 - i) \underline{z} = 7 + 26i & \\ & [(1 + 2i) - (5 - i)] \underline{z} = 7 + 26i & \\ & [1 + 2i - 5 + i] z = 7 + 26i & \\ & (-4 + 3i) z = 7 + 26i & \left| \begin{array}{l} - (5 - i) z \\ \div (-4 + 3i) \end{array} \right. \end{array}$$

$$z = \frac{7 + 26i}{-4 + 3i} \frac{-4 - 3i}{-4 - 3i} = \frac{-28 + 78 - 21i - 104i}{25}$$

$$= \frac{50}{25} - \frac{125}{25} i = 2 - 5i$$

$$S = \{ 2 - 5i \}$$

1.1.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} (2+i)z + (2-i)w = 7-4i \\ (1+i)z - iw = 2+i \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (2+i)z + (2-i)w = 7-4i \\ (1+i)z - iw = 2+i \end{array} \right. \begin{array}{l} w \\ \cdot i \\ (2-i) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \begin{array}{l} (2i+i^2)z + (2i-i^2)w = 7i-4i^2 \\ (-1+2i)z + (1+2i)w = 4+7i \end{array}$$

$$i(-i) = -i^2 = 1$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} \begin{array}{l} (1+i)(2-i)z - (2-i)iw = (2+i)(2-i) \\ (2-i^2-i+2i)z - (2i-i^2)w = 5 \\ (3+i)z + (-1-2i)w = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (-1+2i)z + (1+2i)w = 4+7i \\ (3+i)z + (-1-2i)w = 5 \end{array} \right.$$

$$(2+3i)z = 9+7i$$

$$z = \frac{9+7i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{18+21+14i-27i}{13} = 3-i$$