03.11.26

2.3.16 Tracer le graphe des fonctions suivantes :

c) $f(x) = |x^2 - 2x| - 1$ d) $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$

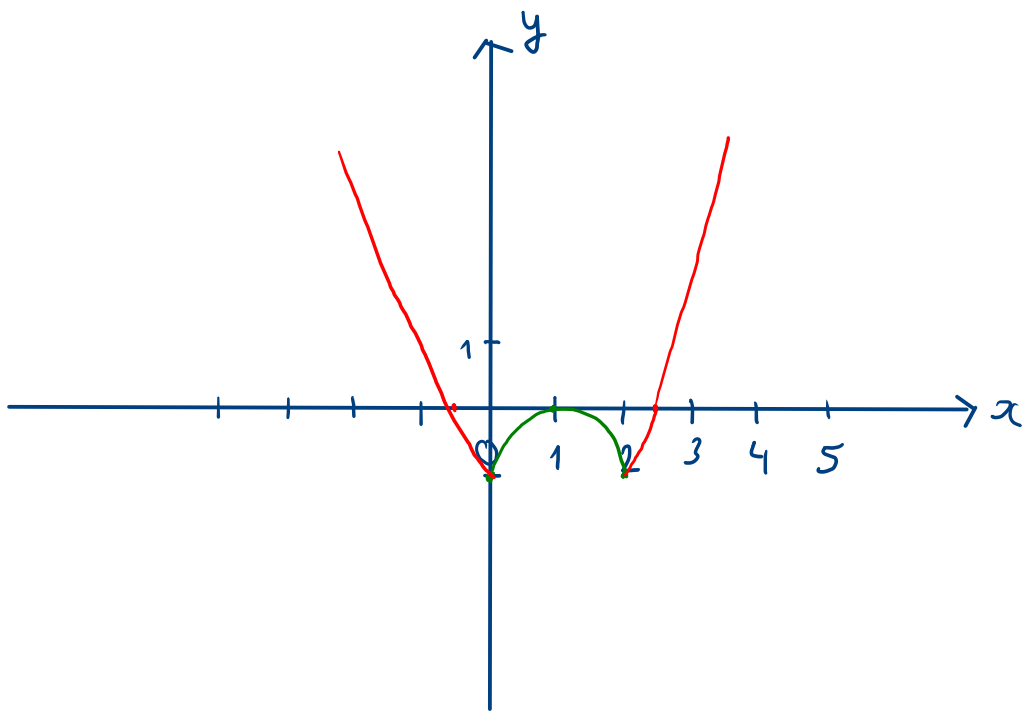
c) $|x^2 - 2x| = |x(x-2)|$ = $\begin{cases} x^2 - 2x, & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x, & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$

j'étudie son signe

x		0		2	
$x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1, & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2, & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$

s'annule en $-0{,}4$ et $2{,}4$



$x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 4 + 4 = 8$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$x = \begin{cases} 2{,}4 \\ -0{,}4 \end{cases}$

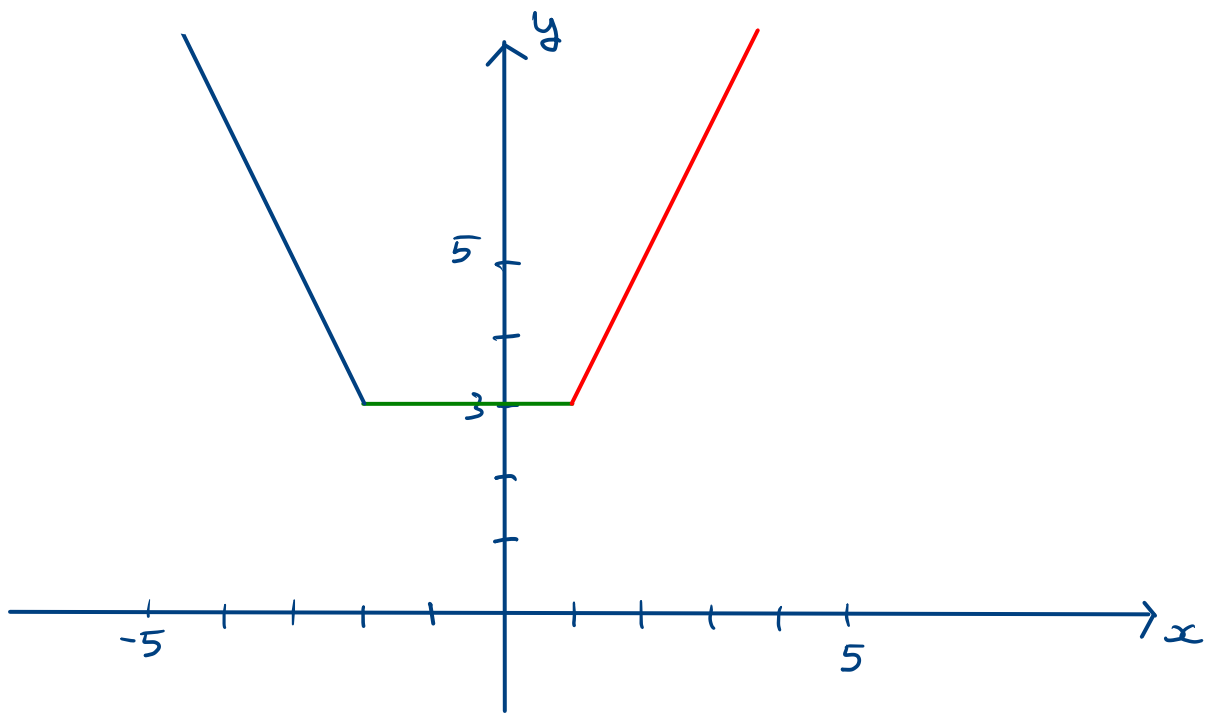
d) $f(x) = |x-1| + |x+2|$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & , \text{ si } x \geq 1 \\ -x+1 & , \text{ si } x < 1 \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & , \text{ si } x \geq -2 \\ -x-2 & , \text{ si } x < -2 \end{cases}$$

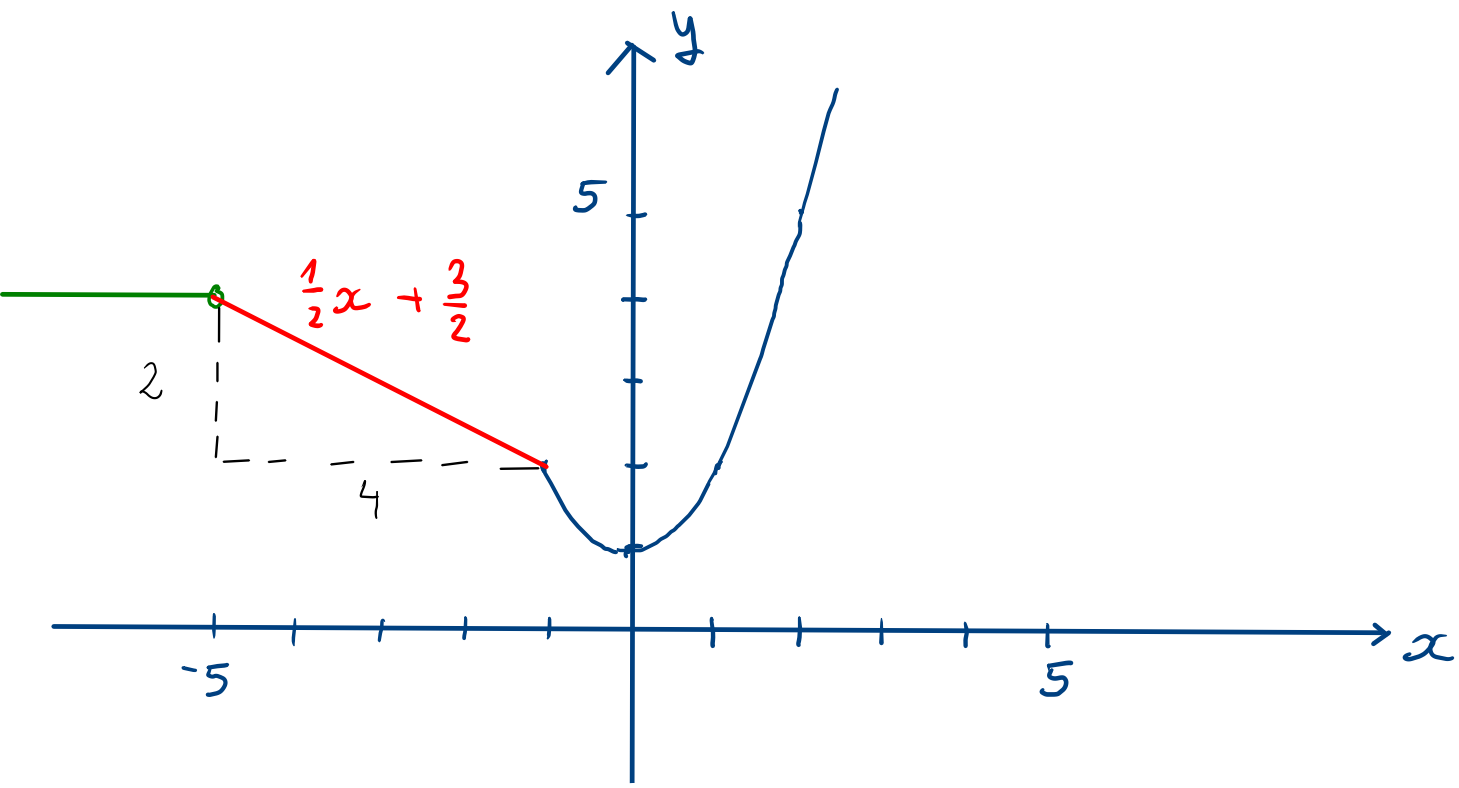
x		-2		1
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$		$-x+1$	$x-1$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$		$x+2$	$x+2$
$\lvert x-1\rvert + \lvert x+2\rvert$	$-2x-1$		3	$2x+1$

⚠ ce n'est pas un tableau des signes



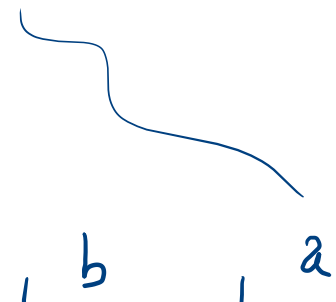
2.3.18 Quelles valeurs doit-on attribuer à a et à b pour que le graphe de f puisse être tracé « sans lever le crayon » ?

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{, si } x < -5 \\ ax + b & \text{, si } -5 \leq x \leq -1 \\ x^2 + 1 & \text{, si } x > -1 \end{cases}$$



① $f(-5) = 4$

② $f(-1) = 2$



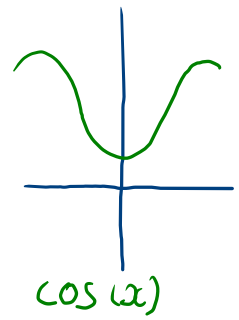
$$\begin{array}{lll} \text{①} \begin{cases} -5a + b = 4 \\ \text{②} \begin{cases} -a + b = 2 \end{cases} \end{cases} & \left| \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ 1 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot(-5) \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{cases} 4a = -2 \\ -4b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Une fonction $f(x)$ est <u>paire</u> si

① $-x \in ED(f)$, pour $x \in ED(f)$

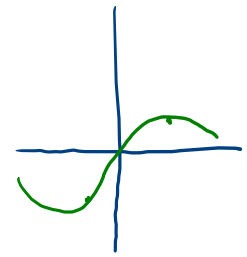
② $f(-x) = f(x)$



Une fonction $f(x)$ est <u>impaire</u> si

① $-x \in ED(f)$, pour $x \in ED(f)$

② $f(-x) = -f(x)$



2.3.19 Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre :

a) $f(x) = 9x^4 - 3x^2 + 2$ paire

b) $f(x) = x^3 - 2x$ impaire

c) $f(x) = 5$

d) $f(x) = x^2 + 8x + 2$ aucune parité

a) $f(-x) = 9x^4 - 3x^2 + 2 = f(x)$

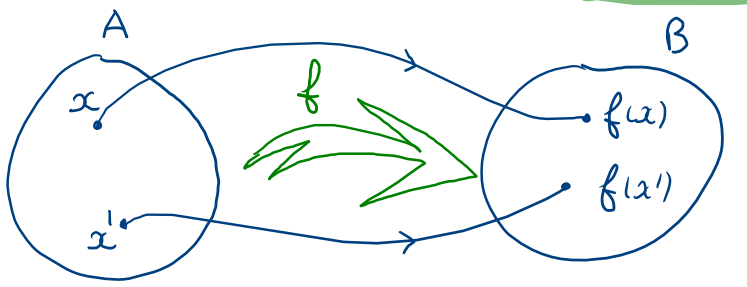
b) $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f(x)$

d) $f(-x) = x^2 - 8x + 2$

2.4 Fonctions injectives, surjectives et bijectives

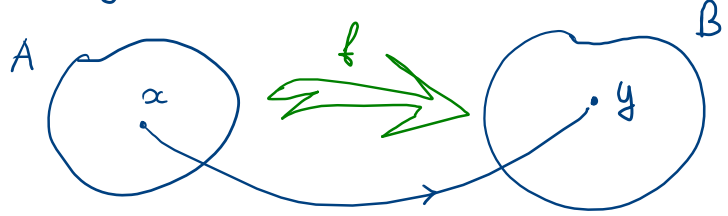
Soit $f : A \longrightarrow B$ une fonction

① $x, x' \in A$. f est injective si $f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'$



ou $x \neq x' \Leftrightarrow f(x) \neq f(x')$

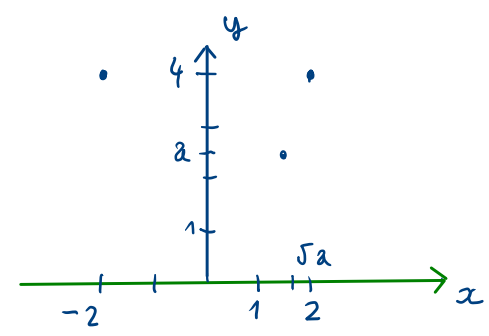
② $\forall y \in B$, $\exists x \in A$ tel que $f(x) = y$



ou $\mathrm{Im}(f) = f(A) = B$ (l'image de A par f est B)

Une fonction est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Exemples : ① $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$x \longmapsto x^2$



a) $f(2) = f(-2) = 4$ pas injectif

b) $y \in \mathbb{R}_+$ $f(\sqrt{y}) = y$ surjective

2.4.1 Déterminer les applications injectives, surjectives ou bijectives.

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$ injective pas surjective

b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

c) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x-3 \end{array}$

a) • $x, x' \in \mathbb{Z}$ $\quad f(x) = 2x+1$, $f(x') = 2x'+1$

$f(x) = f(x') \iff 2x+1 = 2x'+1 \iff 2x = 2x' \iff x = x'$

• $f(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$