① Injectif ② Surjectif 05.11.26

2.4.1 Déterminer les applications injectives, surjectives ou bijectives.

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$

d) $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

① $x, x' : \quad x^3 = x'^3 \Leftrightarrow x = x'$

② $x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Z}$

g) $f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

① $x, x' \in \mathbb{N} \quad (x, x' > 0)$

$x^2 = x'^2 \Rightarrow x = x'$

② $2 \in \mathbb{N}$, $(\sqrt{2})^2 = 2 \notin \mathbb{N}$

j) $f_{10} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$ bijectif

① $x, x' \in \mathbb{R}$:

$x^3 = x'^3 \Leftrightarrow x = x'$

$x^3 - x'^3 = 0$

$(x - x')(x^2 + xx' + x'^2) = 0$

$x = x' \qquad \neq 0$

Injectif

② $y \in \mathbb{R}$: surjectif

$f(\sqrt[3]{y}) = y$

$\sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$

l) $f_{12} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

① $f_{12}(1) = f_{12}(-1) = 1$

pas injectif

② $y \in \mathbb{R}_+$, $y > 0$

$f(\sqrt{y}) = y$

surjectif

n) $f_{14} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$

① $e^x = e^{x'} \Leftrightarrow x = x'$

injectif

② $e^x = -1$

pas surjectif

2.4.2 Définir l'application réciproque des bijections.

c) $$\begin{array}{rccc} f_3 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 2x+3 \end{array}$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f_3} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2x+3 = y \longmapsto x$$

$$\begin{array}{rccc} {}^{r}f_3 & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{x-3}{2} \end{array}$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{{}^{r}f_3} \mathbb{R}$$

Ex :

$$5 \xrightarrow{f_3} 13 \xrightarrow{{}^{r}f_3} 5 \qquad 13 \longmapsto \frac{13-3}{2} = 5$$

$$-2 \longmapsto -1 \longmapsto -2$$

$$\begin{array}{rcl|l} 2x+3 & = & y & -3 \\ 2x & = & y-3 & \div 2 \\ x & = & \dfrac{y-3}{2} & \end{array}$$

g) $f_7 : \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}-\{2\}$, $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$

Fonction homographique

$2 \xrightarrow{f_7} 5 \xrightarrow{{}^r f_7} 2$

$$\frac{2x+1}{x-1} = y \quad \Big| \cdot (x-1) \qquad x \neq 1$$

$$2x+1 = y(x-1)$$

$$2x+1 = yx-y \quad \Big| \; -yx-1$$

$$\underbrace{2x-yx} = -1-y$$

$$x(2-y) = -1-y \quad \Big| \; \div (2-y) \qquad y \neq 2$$

$$x = \frac{-1-y}{2-y}$$

$$x = \frac{y+1}{y-2}$$

$${}^r f_7 : \mathbb{R}-\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{1\}$$

$$x \longmapsto \frac{x+1}{x-2}$$