

Suite et fin

08,09,26

1.1.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \textcircled{1} & (2+i)z + (2-i)w = 7-4i \\ \textcircled{2} & (1+i)z - iw = 2+i \end{cases}$$

Nous avons trouvé $z = 3-i$. Déterminons w par substitution :

$$\begin{array}{lcl} \text{Dans } \textcircled{2} : & (1+i)(3-i) - iw = 2+i & \\ & \underline{3+1} - \underline{i} + \underline{3i} - \underline{2} - \underline{i} = iw & \left| \begin{array}{l} \text{CL} \\ \div i \end{array} \right. \\ & 2+i = iw & \end{array}$$

$$w = \frac{2+i}{i} \cdot \frac{i}{i}$$

$$w = \frac{-1+2i}{i^2} = 1-2i$$

La solution du système : $z = 3-i$ et $w = 1-2i$

1.1.7 Poser $z = x + yi$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $8z + 5\bar{z} = 4 + 3i$

c) $2\Im(\bar{z} + 1) + 2i\Re(-z + 2) = -1 - 12i$

b) $z^2 + 2\bar{z} + 5 = 0$

a) $8(x + yi) + 5(x - yi) = 4 + 3i$

$$8x + 5x + 8yi - 5yi = 4 + 3i$$

$$\underline{13x} + \underline{3yi} = \underline{4} + \underline{3i}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 4 \\ 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{13} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{z = \frac{4}{13} + i}$$

$$S = \left\{ \frac{4}{13} + i \right\}$$

b) $(a + bi)^2 + 2(a - bi) + 5 = 0 \quad [\Delta z = a + bi]$

$$\underline{a^2 - b^2} + \underline{2abi} + \underline{2a - 2bi} + \underline{5} = 0$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a + 5 = 0 & [\text{partie réelle}] \\ 2ab - 2b = 0 & \quad | : 2 \quad [\text{partie imaginaire}] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b(a - 1) = 0 \\ a^2 - b^2 + 2a + 5 = 0 \end{cases}$$

On résout deux systèmes :

$$\begin{cases} b = 0 \\ a^2 + 2a + 5 = 0 \end{cases}$$

$\Delta < 0$
ce système n'a pas de sol.

ou

$$\begin{cases} a = 1 \\ 1 - b^2 + 2 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

On a deux solutions : $z_1 = 1 + 2\sqrt{2}i$ ou $z_2 = 1 - 2\sqrt{2}i$

$$S = \left\{ 1 + 2\sqrt{2}i ; 1 - 2\sqrt{2}i \right\}$$

Le conjugué

Soit $z = a + bi$, $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$

Propriétés

$$\textcircled{1} \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{(z^n)} = (\overline{z})^n \quad \text{ou } n \in \mathbb{N}^*$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)} = \overline{a_1 + a_2 + (b_1 + b_2) i} = a_1 + a_2 - (b_1 + b_2) i \\ &= a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i = \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)} = \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i} \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

③ Démontrons cette propriété par récurrence sur n .

$$\boxed{\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n}$$

1) Initialisation: $n = 1$

$$\bar{z} = \overline{(z^1)} = (\bar{z})^1 = \bar{z}$$

$$2) \underbrace{\left(\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n \right)}_{P_n} \Rightarrow \underbrace{\left(\overline{(z^{n+1})} = (\bar{z})^{n+1} \right)}_{P_{n+1}}$$

En effet :

$$\overline{(z^{n+1})} = \overline{(z^n \cdot z)} \stackrel{②}{=} \underbrace{\overline{z^n}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Par hyp de réc.}}} \cdot \bar{z} = \underbrace{(\bar{z})^n}_{\text{cqfd}} \cdot \bar{z} = (\bar{z})^{n+1}$$

1.1.9 Montrer que si w est une solution de l'équation réelle $az^2 + bz + c = 0$, alors $\bar{w}$ en est une aussi.

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

w est une sol de $az^2 + bz + c = 0 \Rightarrow \bar{w}$ est aussi une solution.

Ex : $z^2 + 4 = 0$
 $z_1 = 2i$ et $z_2 = -2i = \bar{z}_1$

En effet :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Rightarrow \overline{az^2 + bz + c} = \overline{0} \\ \Rightarrow \overline{az^2} + \overline{bz} + \overline{c} = 0 &\Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{z}^2 + \bar{b} \cdot \bar{z} + \bar{c} = 0 \end{aligned}$$

① ②

$$\Rightarrow a \cdot (\bar{z})^2 + b \bar{z} + c = 0 \Rightarrow \bar{z} \text{ est solution de l'équation}$$

③ $\bar{a} = a, b = \bar{b}, c = \bar{c}$

Représentation graphique des nombres complexes

On peut représenter sans ambiguïté un nombre complexe

$z = a + bi$ par le couple (a, b)

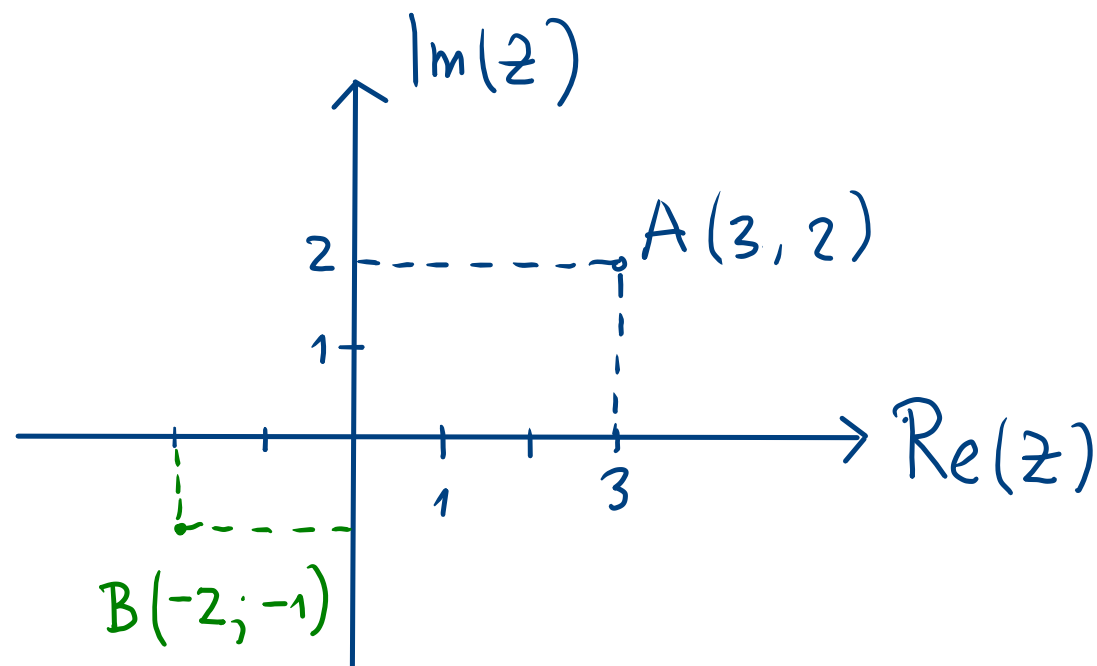
⊂

$$z_A = 3 + 2i$$

Affixe du point A

$$z_B = -2 - i$$

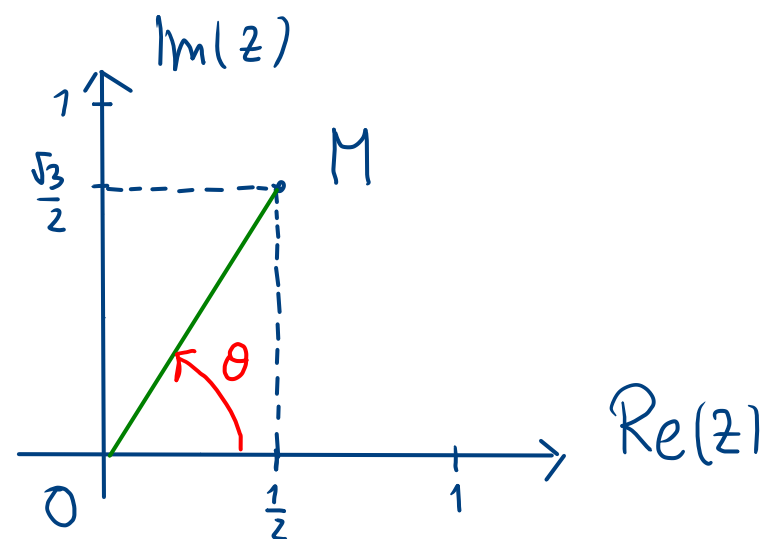
$\mathbb{R}^2$



$$z_M = a + bi \Leftrightarrow M(a, b)$$

Forme trigonométrique des nombres complexes

Soit $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. On a $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Calculons le module de z et l'angle θ entre $\vec{OM}$ et l'axe réel.

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On choisit θ tel que $0 \leq \theta < 2\pi$

On note $z = \left[1; \frac{\pi}{3}\right]$ (forme polaire)

On appelle cet angle l'argument de z .

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left[1; \frac{\pi}{3}\right] = 1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)i \right)$$

1.2.2 Écrire les nombres complexes ci-dessous sous forme trigonométrique :

a) $1 = [1; 0]$

b) $i = [1; \frac{\pi}{2}]$

c) -2

d) $-1 - i$

e) $-1 - \sqrt{3}i$

f) $3 + 4i$

