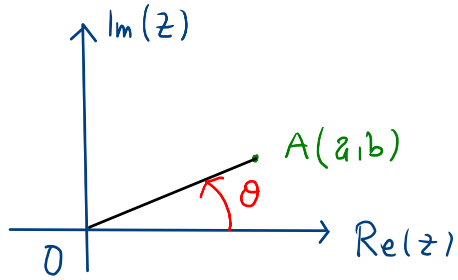
10.09.26

Opérations sur les nombres complexes

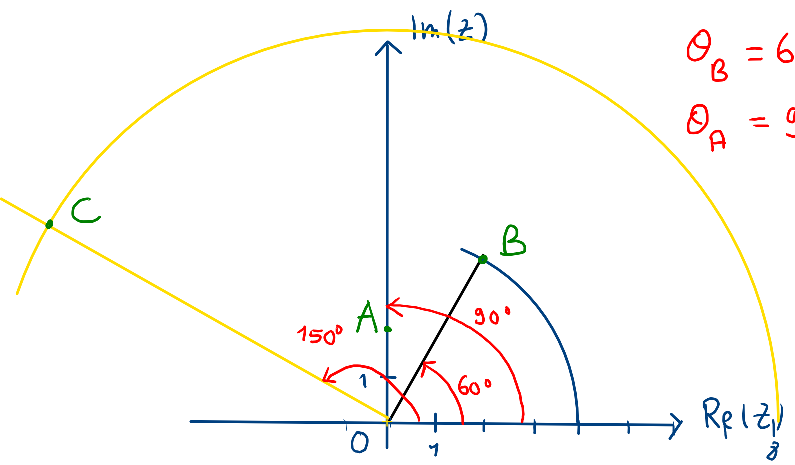


$A(a,b) \iff z_A = a + bi$

$z_A = [r, \theta]$

Soit $z_A = 2i$ et $z_B = 2 + 2\sqrt{3}i$.

On a $z_A = \left[2; \frac{\pi}{2}\right]$ et $z_B = \left[4; \frac{\pi}{3}\right]$



$\theta_B = 60°$

$\theta_A = 90°$

$|z_B| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$

$$\begin{cases} \sin(\theta_B) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(\theta_B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 60°$$

Calculons $z_C = z_A \cdot z_B = 2i(2 + 2\sqrt{3}i) = -4\sqrt{3} + 4i$

$|z_C| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$

$$\begin{cases} \cos(\theta_C) = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \theta_C = 150°$$

$z_C = [8; 150°] = \left[8; \frac{5\pi}{6}\right]$

$z_A \cdot z_B = [2; 90°] \cdot [4; 60°] = [8; 150°]$

Proposition

Soit $z = [r, \theta]$ et $[r', \theta']$ deux nombres complexes.

On a $z \cdot z' = [r \cdot r' ; \theta + \theta']$

Démonstration :

CRM page 30

Fonctions trigonométriques d'une somme et d'une différence d'arcs

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$	$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$	$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

$$z \cdot z' = [r, \theta] \cdot [r'; \theta'] = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \cdot r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$$

$$= r \cdot r' \left[\cos(\theta) \cdot \cos(\theta') - \sin(\theta) \cdot \sin(\theta') + i\left(\sin(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta')\cos(\theta)\right) \right]$$

$$= r r' \underbrace{\left(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \right)}_{\text{de module } 1} = [r r' ; \theta + \theta']$$

Proposition : $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$

$$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'} ; \theta - \theta'\right]$$

Démonstration :

$\cos(\theta') = \cos(-\theta')$
$\sin(\theta') = -\sin(-\theta')$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)}{r'\left(\cos(\theta') + i\sin(\theta')\right)} \frac{\left(\cos(\theta') - i\sin(\theta')\right)}{\left(\cos(\theta') - i\sin(\theta')\right)} = \frac{r}{r'} \frac{\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)\left(\cos(-\theta') + i\sin(-\theta')\right)}{\cos^2(\theta') + \sin^2(\theta')}$$

$$= \frac{r}{r'} \frac{[1;\theta] \cdot [1;-\theta']}{\underbrace{\cos^2(\theta') + \sin^2(\theta')}_{1}} = \frac{r}{r'}[1 \cdot 1 ; \theta - \theta']$$

$$= \left[\frac{r}{r'} ; \theta - \theta'\right]$$

cqfd

Proposition Formule de Moivre

$z = [r, \theta]$, alors $z^n = [r^n ; n\theta]$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$[\cos(\theta) + \sin(\theta)\, i]^n = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)\, i$$

Démonstration

Par récurrence sur n :

① Si $n = 1$: c'est évident $z^1 = z = [r, \theta] = [r^1 ; 1 \cdot \theta]$

② Supposons que $z^n = [r^n, n\theta]$ est vraie et démontrons que $z^{n+1} = [r^{n+1}, (n+1)\theta]$ est vraie.

En effet :

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = \underbrace{[r^n, n\theta]}_{\text{par hyp de réc.}} \cdot [r, \theta] = [r^n \cdot r ; n\theta + \theta]$$

$$= [r^{n+1} ; (n+1)\theta] \quad \text{cqfd}$$