2.4.3 Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée pour que les fonctions suivantes soient des bijections. Puis donner leur réciproque.

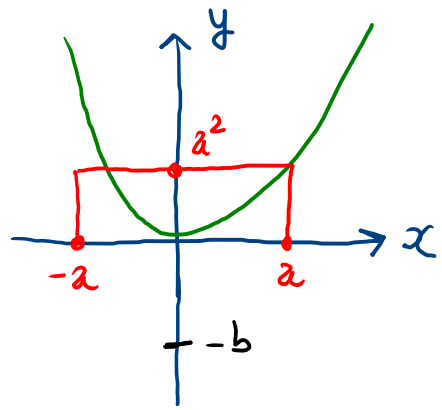
10.11.26

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^2 + x - 6$
c) $f(x) = -x^2 + 4x$
d) $f(x) = \cos(x)$
e) $f(x) = \tan(x)$
f) $f(x) = \sin(2x)$

a) $ED(f) = \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \mathbb{R}$



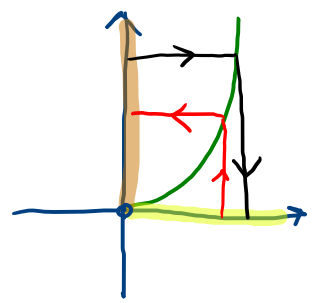
pas injectif

pas surjectif

$[0;+\infty[$ $[0;+\infty[$

$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto x^2$



$f_1^r : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto \sqrt{x}$

$f_2 : \mathbb{R}_- \longmapsto \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto x^2$

$f_2^r : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_-$

$x \longmapsto -\sqrt{x}$

$f_3 : [1;2] \longrightarrow [1;4]$

$x \longmapsto x^2$

$f_3^r : [1;4] \longrightarrow [1,2]$

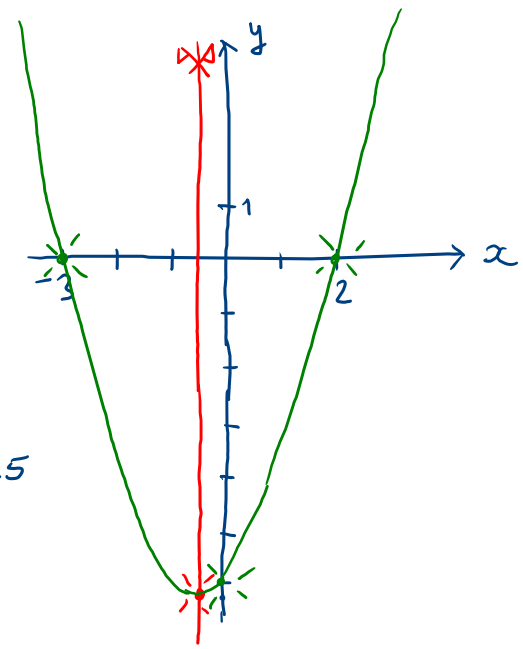
$x \longmapsto \sqrt{x}$

b) $f(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$

$$\not\Delta = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$$

sommet $S\left(-\frac{1}{2} ; \frac{-25}{4}\right)$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{24}{4} = \frac{-25}{4} = -6{,}25$$



$f : \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[\longrightarrow \left[-\frac{25}{4} ; +\infty\right[$

$x \longmapsto x^2 + x - 6 = y$

$^r f : \left[-\frac{25}{4} ; +\infty\right[\longrightarrow \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

$y \longmapsto \sqrt{y + \frac{25}{4}} - \frac{1}{2}$

$4 \xmapsto{f} 16 + 4 - 6 = 14$

$4 \xleftarrow{f^r} 14$

Recherchons l'expression algébrique qui donne la réciproque:

$$x^2 + x - 6 = y$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = y + 6 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = y + \frac{25}{4}$$

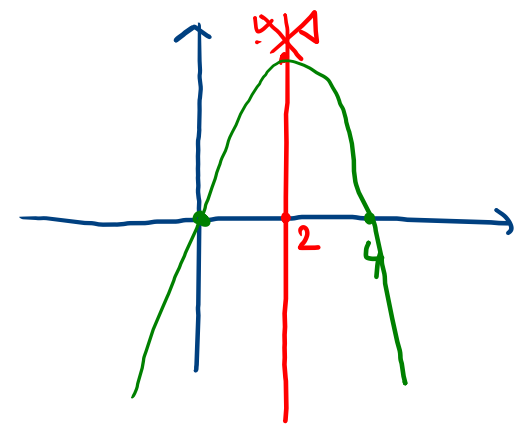
$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{y + \frac{25}{4}} \qquad y \geq -\frac{25}{4}$$

≥ 0

$$x = \sqrt{y + \frac{25}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$^r f(14) = \sqrt{\frac{56+25}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{81}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

c) $f(x) = -x^2 + 4x$ $= -(x^2 - 4x) = -x(x-4)$



Sommet $(2;4)$

$f : [2;+\infty[\longrightarrow]-\infty;4]$

$x \longmapsto -x^2 + 4x$

$f :]-\infty;4] \longrightarrow [2;+\infty[$

$x \longmapsto \sqrt{4-x} + 2$

Recherche de l'expression qui donne la réciproque

$-x^2 + 4x = y$

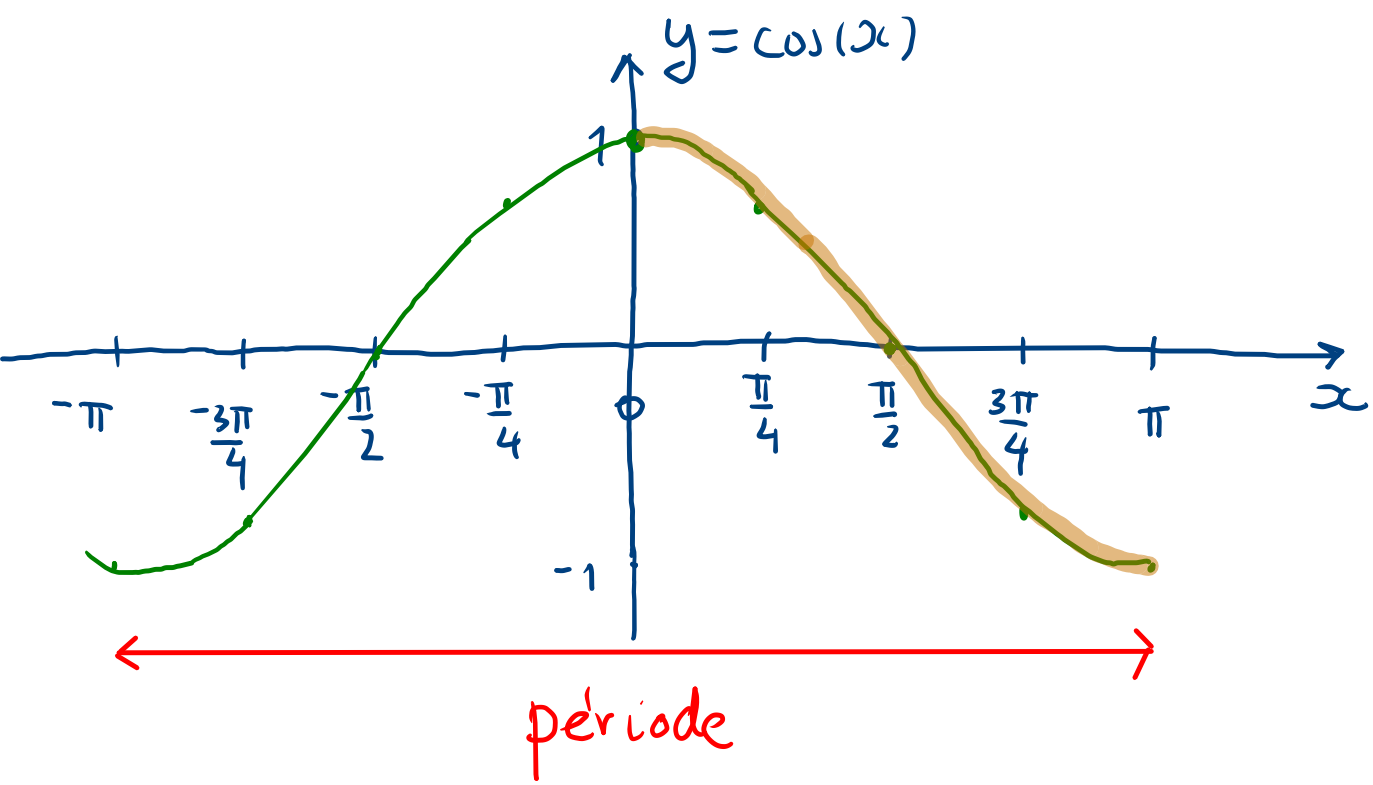
$x^2 - 4x + 4 = -y + 4$

$(x-2)^2 = -y + 4$

$x - 2 = \sqrt{4-y}$

$x = \sqrt{4-y} + 2$

d) $f(x) = \cos(x)$ période : 2π

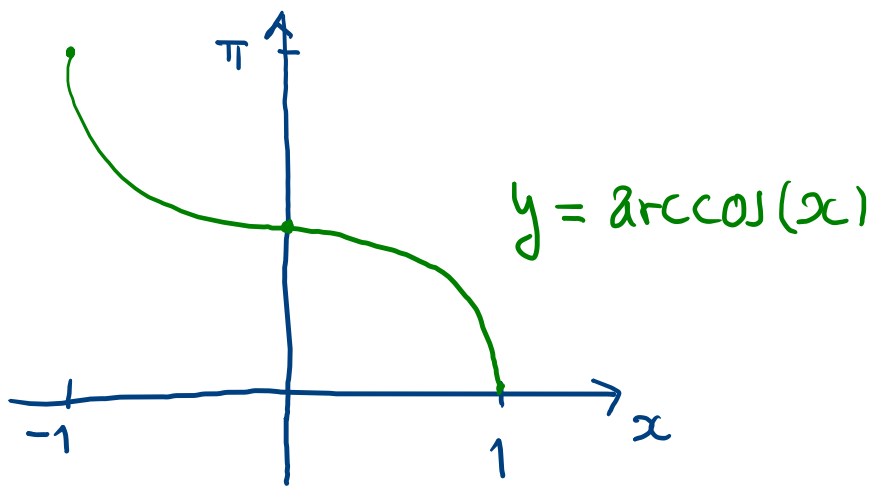


$\cos : [0;\pi] \longrightarrow [-1;1]$

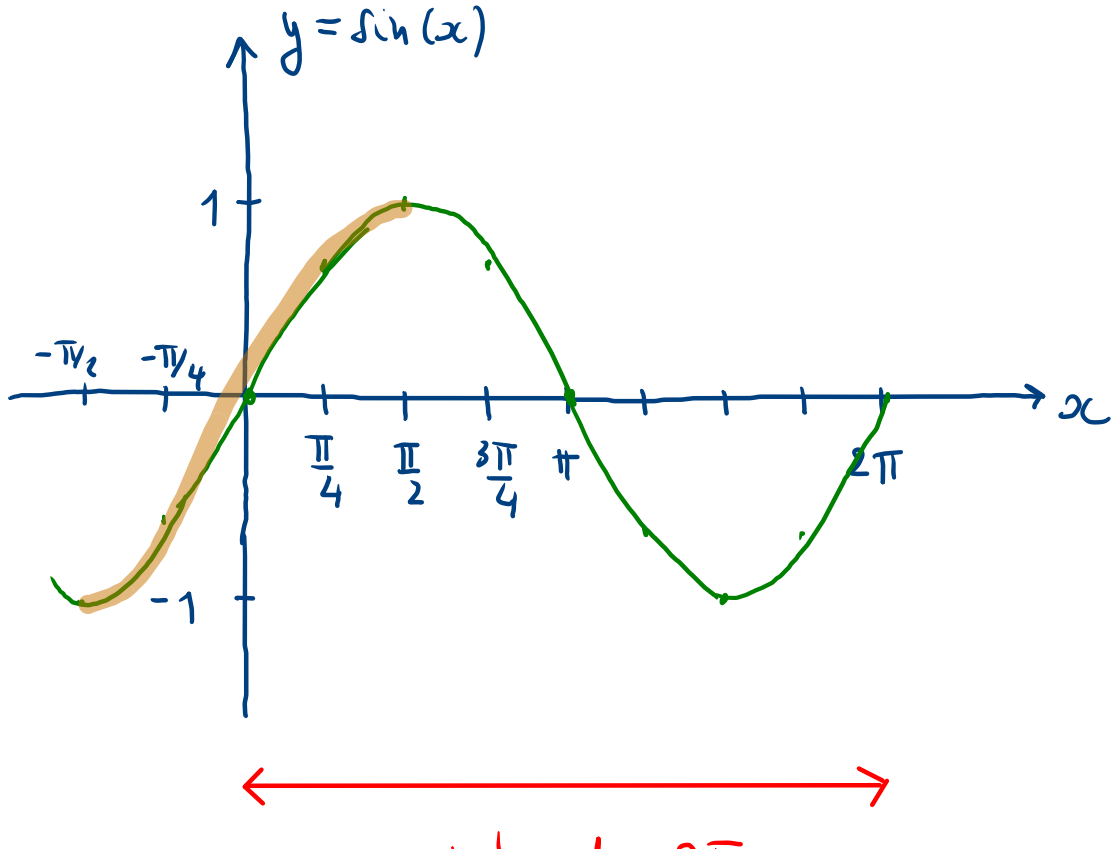
$x \longmapsto \cos(x)$

$\arccos : [-1;1] \longrightarrow [0,\pi]$

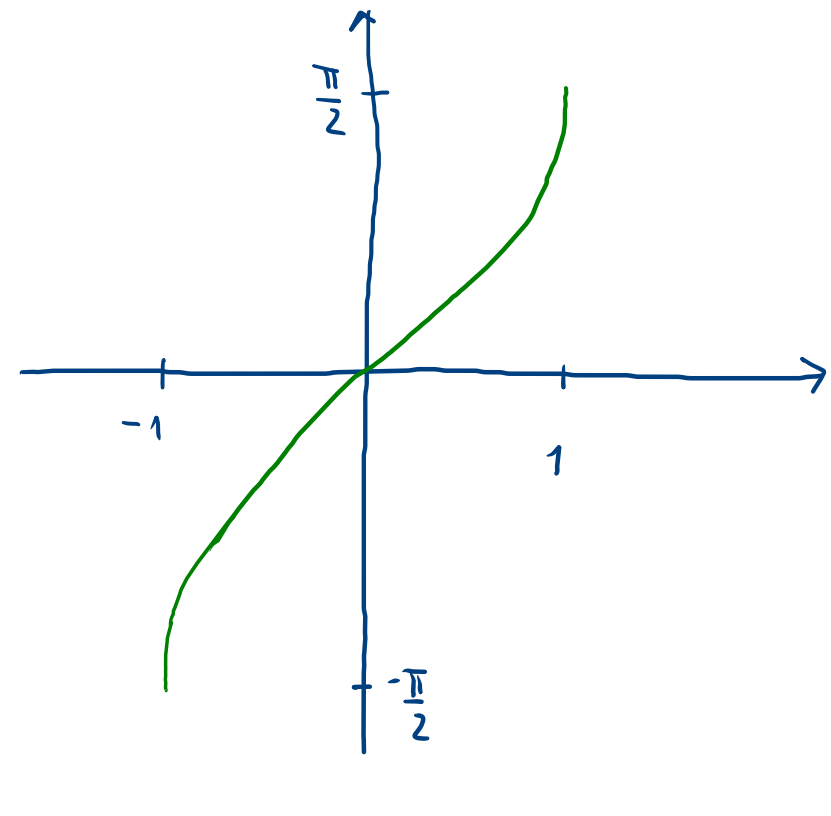
$x \longmapsto \arccos(x)$



$f(x) = \sin(x)$



période 2π



$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

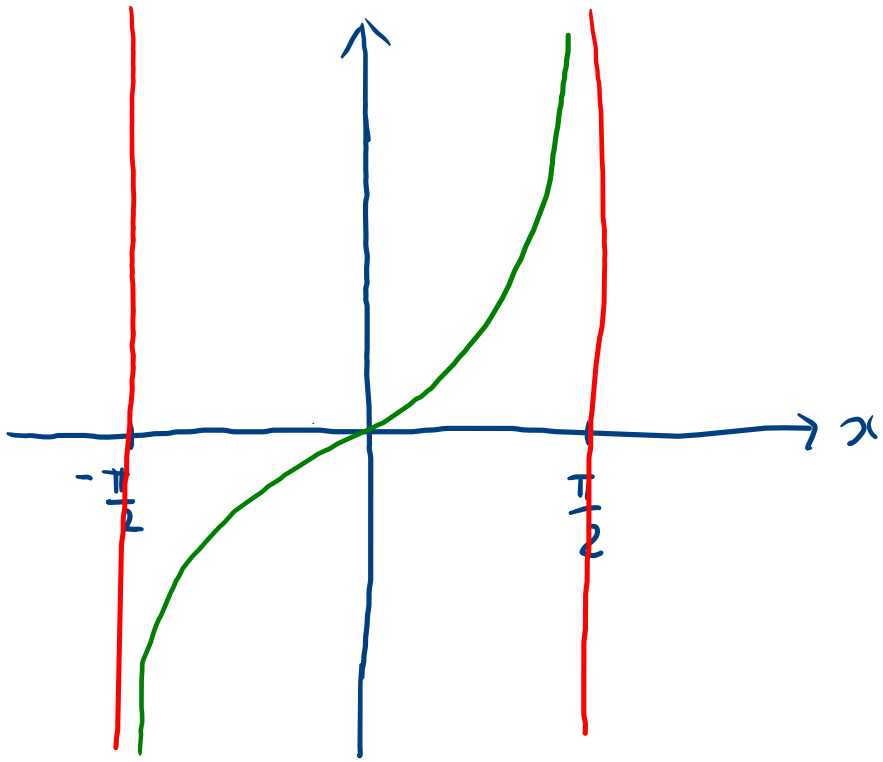
$$x \longmapsto \sin(x)$$

$$\arcsin : [-1; 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \longmapsto \arcsin(x)$$

e) $\tan : \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

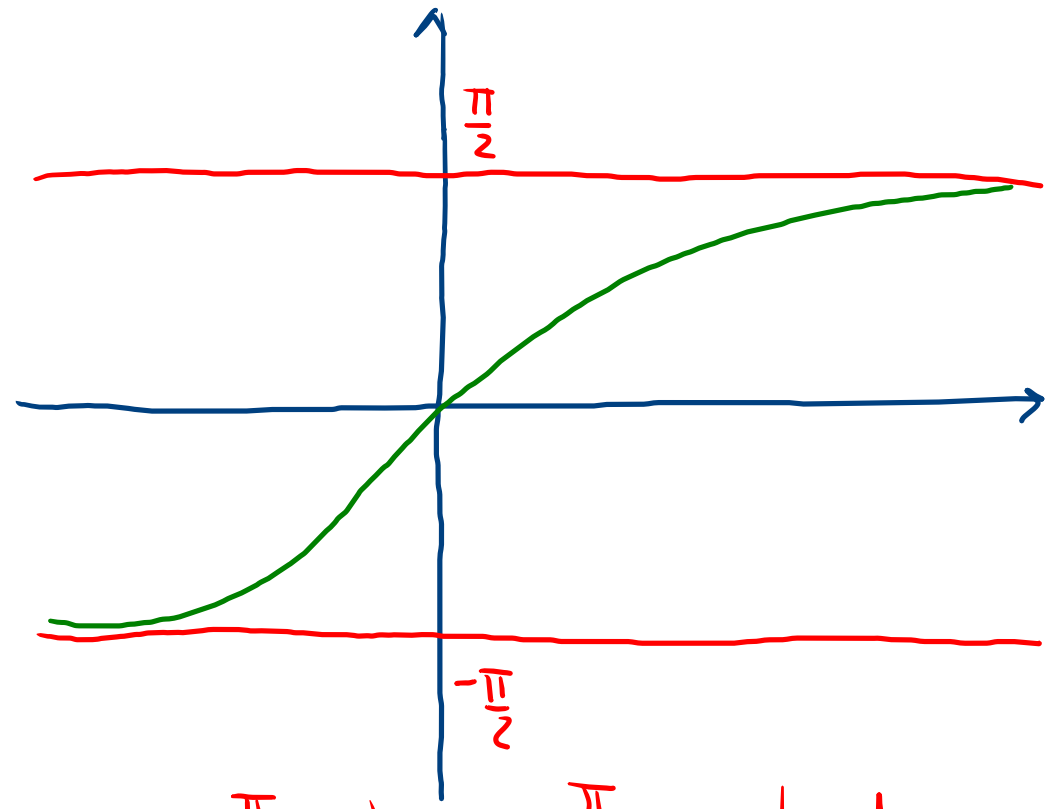
$x \longmapsto \tan(x)$



$x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ sont des asymptotes verticales

$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

$x \longmapsto \arctan(x)$



$y = -\frac{\pi}{2}$ et $y = \frac{\pi}{2}$ sont des asymptotes horizontales

2.4.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) f est-elle injective ? surjective ?

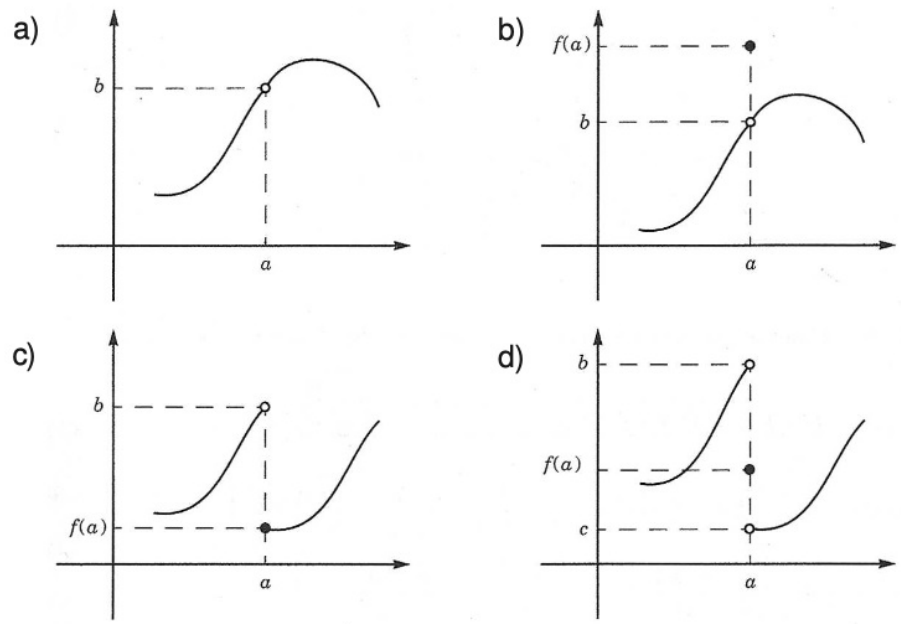
b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1\,;\,1]$.

c) Montrer que la restriction $g : [-1\,;\,1] \to [-1\,;\,1]$, définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Mercredi 10.11.26

2.6 Limites de fonctions

2.6.1 Lire les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.



	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} f(x)$,	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
a)			
b)			
c)			
d)			