11.11.26

2.4.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

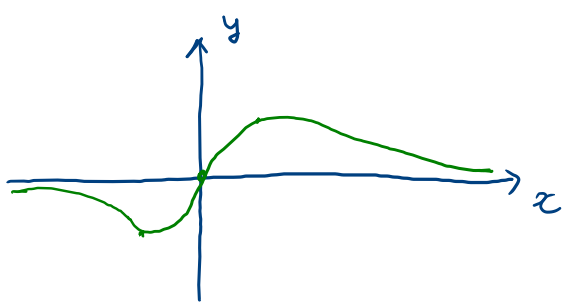
a) f est-elle injective ? surjective ?

b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1\,;\,1]$.

c) Montrer que la restriction $g : [-1\,;\,1] \to [-1\,;\,1]$, définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.

a) Signe de f :

x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$



f est impaire : $f(-x) = -f(x)$

Injectivité : Soit $a \in \mathbb{R}^*$. $f(x) = a$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{1+x^2} = a \quad \Big| \cdot (1+x^2)$$

$$a(1+x^2) - 2x = 0$$

$$\boxed{a x^2 - 2x + a = 0}$$

équation du 2ème degré avec un paramètre

$\Delta = 4 - 4 \cdot a \cdot a = 4(1-a^2) = 4(1-a)(1+a)$

a		-1		1	
Δ	$-$	0	$+$	0	$-$

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{1-a^2}}{2a} = \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$$

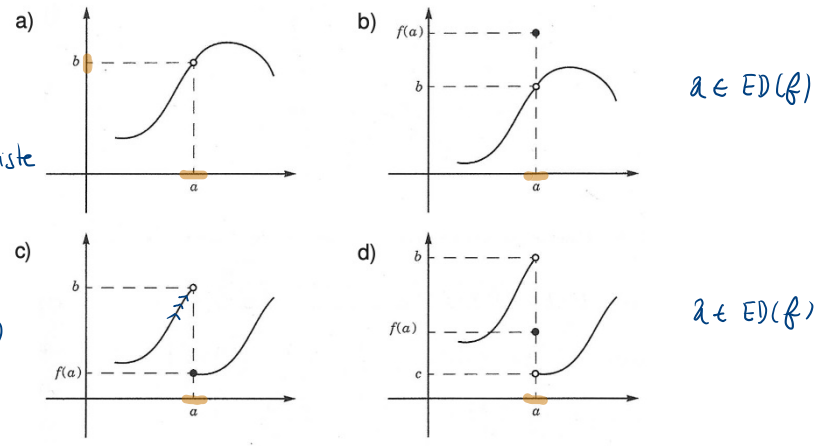
$$x_2 = \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$$

Donc f n'est pas injective : $f(x_1) = f(x_2) = a$ pour $a \in [-1, 1]$, $a \neq 0$

Surjectivité Si $a < -1$ ou $a > 1$, $f(x) = a$ est impossible

2.6 Limites de fonctions

2.6.1 Lire les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.



$a \notin ED(f)$
$f(a)$ n'existe

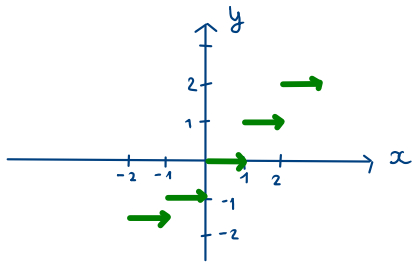
$a \in ED(f)$

$a \in ED(f)$

$a \notin ED(f)$

	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} f(x)$,	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
a)	b	b	b
b)	b	b	b
c)	b	$f(a)$	—
d)	b	c	—

Exemples 1) $f(x) = [x]$

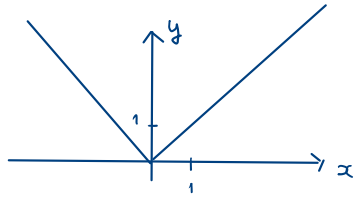


$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} [x] = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} [x] = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} [x]$ n'existe pas

2) $f(x) = |x|$



$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} |x| = 0$ $\quad |-0{,}001| \sim 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} |x| = 0$ $\quad |0{,}001| \sim 0$

$\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$

Les limites

① Soit la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 6}{x - 2}$.

$ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

↑ pôle, valeur interdite

Que se passe-t-il lorsque $x \to 2$?

$f(1,9) = 6,8$ $\qquad$ $f(1,999) = 6,998$

$f(2,1) = 7,2$ $\qquad$ $f(2,001) = 7,002$

Il semble que $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7}$

Effectuons un calcul de limite :

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2} \overset{\text{Indéterminé}}{=} \underset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{} \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(2x+3)}{x-2} = 7$$