

Les racines carrées

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on appelle racine carrée de α , le nombre $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r^2 = \alpha$.

On note $r = \sqrt{\alpha}$.

Ex: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{2,25} = 1,5$, ...
 $\sqrt{-1}$ n'existe pas et ne s'écrit pas

Les racines carrées dans $\mathbb{C}$

On n'écrit pas $\sqrt{1+i}$!

1) $z^2 = 4$

$$z = \pm 2$$

2) Calculons les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $z = 3 - 4i$

Soit $a+bi$ le nombre complexe tel que $(a+bi)^2 = z$

$$\underline{a^2 - b^2} + \underline{2abi} = \underline{3 - 4i}$$

On a le système d'équations:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases}$$

On rajoute une équation: $|(a+bi)^2| = |3-4i|$

$$|a+bi|^2 = |3-4i|$$

$$a^2 + b^2 = 5$$

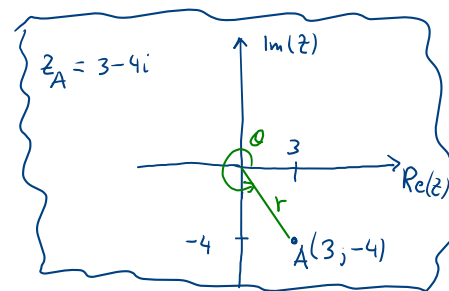
$$|z^2| = |z|^2$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

On obtient le système:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} b^2 & a^2 \\ \hline \cdot 1 & \cdot (-1) \\ \cdot 1 & \cdot 1 \\ \hline & \div 2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 8 \\ 2b^2 = 2 \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = \pm 1 \\ ab = -2 \end{cases}$$



Les deux racines carrées de $3-4i$ sont: $2-i$ et $-2+i$

$$(2-i)^2 = 4 - 1 - 4i = 3 - 4i$$

$$(-2+i)^2 = 4 - 1 - 4i = 3 - 4i$$

1.2.10 Déterminer sous forme algébrique les racines carrées complexes des nombres ci-dessous :

a) $1 \quad \pm 1$

d) $-9 \quad \pm 3i$

b) i

e) $3 + 4i$

c) $-i$

f) $-5 + 12i$

b) $z = 0 + 1 \cdot i$

Les racines carrées : $(a+bi)^2 = i$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases} \begin{array}{c} b^2 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \begin{array}{c} a^2 \\ \cdot (-1) \\ \cdot 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 1 \\ 2b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

les racines sont $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$