

1.3.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

$$\text{a) } z^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad S = \{-5; 5\}$$

$$\text{b) } z^2 = -4 \quad \Rightarrow \quad S = \{-2i; 2i\}$$

$$\text{c) } 2z^2 + 10z + 17 = 0$$

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 2 \cdot 17 = -36 = 36i^2$$

$$z_1 = \frac{-10 + 6i}{4} = -\frac{10}{4} + \frac{6}{4}i = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$\overline{z_1} = z_2$$

$$z_2 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$S = \left\{ -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i; -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i \right\}$$

$$\text{d) } z^2 + 3z - 5 = 0$$

$$\Delta = 9 + 20 = 29$$

$$S = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{29}}{2} \right\}$$

Equations du 2^{ème} degré dans $\mathbb{C}$

$a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, on résout :

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0$$

Posons $D = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, il existe $d \in \mathbb{C}$ tq $d^2 = D$

$$az^2 + bz + d = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(z + \frac{b+d}{2a}\right)\left(z + \frac{b-d}{2a}\right) = 0$$

On en déduit que toute équation complexe de degré 2 a deux solutions distinctes ou confondues.

Théorème fondamental de l'algèbre

Toute équation complexe de degré n admet exactement n solutions.

On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

$$e) z^2 - 3(1+i)z + 6 + 7i = 0$$

$$f) (1+2i)z^2 - (7+4i)z + 5 - 5i = 0$$

$$e) \Delta = [-3(1+i)]^2 - 4(6+7i) = -24 - 10i$$

Déterminons les racines carrées $a+bi$ de $-24-10i$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ a^2 + b^2 = 26 \\ 2ab = -10 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{réelle} \\ \text{module} \\ \text{complexe} \end{array} \quad \sqrt{(-24)^2 + (-10)^2} = 26$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 25 \\ ab = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 5 \\ ab = -5 \end{cases} \quad -1+5i \text{ et } 1-5i$$

On calcule les deux solutions

$$z_1 = \frac{3(1+i) - 1 + 5i}{2} = \frac{2 + 8i}{2} = \frac{2}{2} + \frac{8}{2}i = 1 + 4i$$

$$z_2 = \frac{3(1+i) + 1 - 5i}{2} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$$

$$S = \{ 1+4i; 2-i \}$$

$$f) (1+2i)z^2 - (7+4i)z + 5 - 5i = 0$$

1.3.1

$$f) (1+2i)z^2 - (7+4i)z + 5-5i = 0$$

$$D = (7+4i)^2 - 4(1+2i)(5-5i) = 33+56i - 4(15+5i) = -27+36i$$

Les racines carrées de D: $d^2 = D$ avec $d = a+bi$

$$\begin{array}{l} \text{Re} \\ \text{module} \\ \text{Im} \end{array} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = -27 \\ a^2 + b^2 = 45 \\ 2ab = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = \pm 6 \\ ab = 18 \end{cases}$$

$$d = 3+6i \quad \text{ou} \quad d = -3-6i$$

$$z_1 = \frac{7+4i + 3+6i}{2(1+2i)} = \frac{10+10i}{2(1+2i)} = \frac{5+5i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{15-5i}{5} = 3-i$$

$$z_2 = \frac{7+4i - 3-6i}{2(1+2i)} = \frac{4-2i}{2(1+2i)} = \frac{2-i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{-5i}{5} = -i$$

$$S = \{ 3-i ; -i \}$$

Factorisation de polynôme

1.3.2 Décomposer dans $\mathbb{R}[z]$ et $\mathbb{C}[z]$ les polynômes ci-dessous :

a) $z^4 - 1 = p$

b) $z^4 + 1$

a) $p = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z-1)(z+1)\overbrace{(z^2 + 1)}^{z^2 - i^2} \in \mathbb{R}[z]$

$$p = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) \in \mathbb{C}[z]$$

b) $p = z^4 + 1$

On cherche les zéros de $z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1$

On cherche les racines quatrièmes de -1 , on note $w = [r, \theta]$

$$[r^4, 4\theta] = [1, \pi]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\theta = \pi + n2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

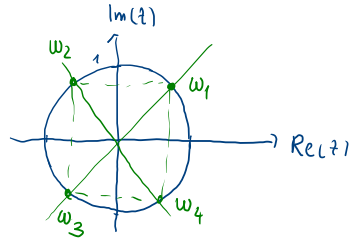
rotation de 90°

$$w_1 = \left[1, \frac{\pi}{4} \right] = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$w_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \bar{w}_2$$

$$w_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \bar{w}_1$$



$$p = (z - w_1)(z - \bar{w}_1)(z - w_2)(z - \bar{w}_2)$$

$$p = \left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right) \in \mathbb{C}[z]$$

$$p = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1) \in \mathbb{R}[z]$$

Plus rapide...



$$p = z^4 + 1 = \underbrace{z^4 + 2z^2 + 1}_{(z^2+1)^2} - 2z^2$$

$$= (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2$$

$$= (z^2 + 1 - \sqrt{2}z)(z^2 + 1 + \sqrt{2}z)$$

$$= (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$$

$$c) \quad z^3 + 1 \quad p = z^3 + 1$$

$$1^o) \quad \text{posons } w = [r, \theta] \text{ tel que } w^3 = -1$$

$$[r^3, 3\theta] = [1, \pi] \dots$$

$$2^o) \quad p = z^3 + 1 = (z+1) \underbrace{(z^2 - z + 1)}$$

Nardi 1.3.2 c) et 1.3.2 e)

