

PuissancesDéfinition

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fois}}$$

Propriétés :

1)  $a^1 = a$

2)  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

3)  $(a^n)^m = a^{nm}$

4)  $a^n \cdot \underbrace{a^0}_{1: \text{élément neutre}} = a^{n+0} = a^n \Rightarrow a^0 = 1 \quad a \neq 0$

5)  $a^n \cdot \underbrace{a^{-n}}_{\text{inverse de } a^n} = a^{n+(-n)} = a^{n-n} = a^0 = 1$   
 $\text{inverse de } a^n : a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ex:  $10^4 \cdot \underbrace{10^{-3}}_{0,001} = 10^1$  ;  $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

⚠ La puissance négative n'a rien à voir avec le signe de  $a$ .

6)  $(a^n)^{\frac{1}{n}} = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = a^1 = a$

Donc  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$$\sqrt[2]{9} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$\sqrt[3]{8} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$\sqrt[4]{81} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3$$

$$2 < \sqrt[3]{9} < 3$$

$$8 < 9 < 27$$

$$\sqrt[3]{9} \approx 2,08$$

7)  $2^{\sqrt{2}} = ?$



## 4.1 Puissances et racines

4.1.1 Simplifier les expressions suivantes :

a)  $2^4 \cdot 3^4$       b)  $2^3 \cdot (-3)^3 \cdot 4^3$       c)  $3^6 \cdot 5^6$

d)  $5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot 5^{10}$       e)  $3^2 \cdot 5^2 \cdot 15^3$       f)  $\frac{5^8}{5^6}$

g)  $\frac{5^6}{5^8}$       h)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$       i)  $\frac{7 \cdot 7^5 \cdot 7^0 \cdot 7}{7^3 \cdot 7^4}$

4.1.2 Simplifier les expressions suivantes :

a)  $(2^2)^3$       b)  $2^{(2^3)}$       c)  $((-4)^2)^4$

d)  $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^6$       e)  $\left(-\frac{2^4}{3^3}\right)^2$       f)  $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(\frac{5}{3}\right)^3$

g)  $4^2 \cdot 2^5 \cdot 8^2$       h)  $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \div \left(\frac{9}{8}\right)^4$       i)  $\frac{(3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 81)^5}{3^{50}}$

4.1.3 Calculer :

a)  $4^{-2}$       b)  $2^{-1}$       c)  $3^{-3}$       d)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$       e)  $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-2}$       f)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

4.1.2

$$i) \frac{(3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 81)^5}{3^{50}} = \frac{(3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4)^5}{3^{50}} = \frac{(3^{10})^5}{3^{50}} = \frac{3^{50}}{3^{50}} = 1$$

4.1.3

$$f) \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$$

$$a) x^n \cdot y^n = (xy)^n$$

$$\underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fois}} \cdot \underbrace{y \cdot \dots \cdot y}_{n \text{ fois}} = \underbrace{(xy) \cdot \dots \cdot (xy)}_{n \text{ fois}}$$

$$a) 6^4$$

$$b) (2 \cdot (-3) \cdot 4)^3 = (-24)^3 = (-1)^3 \cdot 24^3 = -24^3$$

4, 1, 5

$$\text{g)} \quad 7^{-3} \cdot \frac{49}{7^8} \cdot 7 = 7^{-3} \cdot \frac{7^2}{7^8} \cdot 7^1 = 7^{-3} \cdot 7^{-6} \cdot 7^1 = 7^{-8}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^n \cdot x^{-m} = x^{n-m}$$

$$\text{i)} \quad \frac{1'280 \cdot 5^7 \cdot 125}{(0,2 \cdot 25)^3} = \frac{5^1 \cdot 256 \cdot 5^7 \cdot 5^3}{(5^{-1} \cdot 5^2)^3} = \frac{2^8 \cdot \cancel{5^1}^{5^8}}{\cancel{5^3}} = 2^8 \cdot 5^8 = 10^8$$

$$\text{h)} \quad 10'000 \cdot \frac{100}{100'000} \cdot 10^{-3} = 10^4 \cdot \frac{10^2}{10^5} \cdot 10^{-3} = 10^4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} = 10^{-2}$$

4.1.6 Simplifier les expressions suivantes et écrivez-les sans fraction :

a)  $x^2 y z^3 \cdot 3 x y \cdot 27 x^3 z^5$     b)  $(2a^2 b^3 c)^4$     c)  $\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2 \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^3$     d)  $\frac{(4x^2 y^3)^5}{(2xy)^3} \div \frac{x^7}{(y^3)^4}$

a)  $\underline{3 \cdot 3^3} \cdot \underline{x^2 \cdot x \cdot x^3} \cdot \underline{y \cdot y} \cdot \underline{z^3 \cdot z^5} = 3^4 x^6 y^2 z^8$   
 $= 81 x^6 y^2 z^8$

c)  $\frac{2^2 \cancel{r^6}^{r^3}}{\cancel{s^2}} \cdot \frac{\cancel{s^3}^s}{\cancel{r^3}} = \frac{2^2 r^3 s}{1} = 4r^3 s$

d)  $\frac{4^5 x^{10} y^{15}}{2^3 x^3 y^3} \cdot \frac{y^{12}}{x^7} = \frac{2^{10} x^{10} y^{15}}{2^3 x^3 y^3} \cdot \frac{y^{12}}{x^7} = \frac{\cancel{2^{10}}^{2^7} \cancel{x^{10}}^1 y^{27}}{\cancel{2^3} \cancel{x^{10}} y^3} = 2^7 \cdot y^{24}$

#### 4.1.8 Simplifier les expressions suivantes :

$$\text{m)} \quad 3\sqrt{5} - 4\underbrace{\sqrt{20}}_{2\sqrt{5}} + 5\underbrace{\sqrt{45}}_{3\sqrt{5}} - 3\underbrace{\sqrt{80}}_{4\sqrt{5}} = *$$

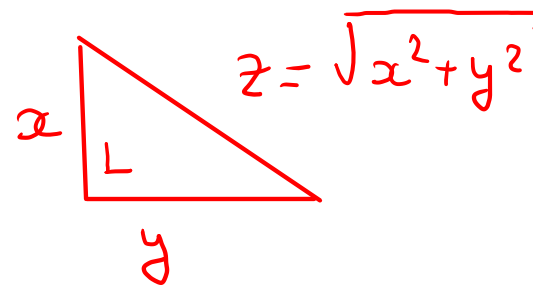
$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{20} &= \sqrt{4 \cdot 5} = (4 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \\ &= \underbrace{\sqrt{4}}_2 \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$* = 3\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 12\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

$$x, y > 0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} < x + y$$



| $n$ | $n^2$ |
|-----|-------|
| 1   | 1     |
| 2   | 4     |
| 3   | 9     |
| 4   | 16    |
| 5   | 25    |