

1.3.5 Soit l'équation

$$3z^3 + 2z^2 + 7z - 20 = 0$$

24.08.26

- Vérifier que le nombre complexe $u = -1 + 2i$ est solution de l'équation ci-dessous.
- Résoudre complètement l'équation ci-dessus dans $\mathbb{C}$.
- En déduire une factorisation du polynôme

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 7x - 20$$

dans l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

$$a) \quad P = 3z^3 + 2z^2 + 7z - 20$$

Par Horner : La division par $z - (-1 + 2i)$

3	2	7	-20
-1+2i	-3+6i	-11-8i	20
3	-1+6i	-4-8i	0 = reste $P(-1+2i) = 0$

$$(-1+2i)(-1+6i) = 1 - 6i - 2i + 12i^2 = -11 - 8i$$

$$(-1+2i)(-4-8i) = 4 + 8i - 8i - 16i^2 = 20$$

Comme le reste est nul, $-1+2i$ est solution de l'équation

b) Comme $P \in \mathbb{R}[z]$, donc $\overline{-1+2i} = -1-2i$ est aussi un zéro

$$p = (z - (-1+2i))(z - (-1-2i))(3z + a)$$

Par Horner

3	-1+6i	-4-8i
-1-2i	-3-6i	4+8i
3	-4	0

$$p = (z - (-1+2i))(z - (-1-2i))(3z - 4) \in \mathbb{C}[z]$$

$$c) \quad p = (3z - 4)(z^2 + 2z + 5) \quad P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 7x - 20$$

$$(z - (-1+2i))(z - (-1-2i)) = z^2 - \underbrace{(-1-2i - 1+2i)}_{-2} z + 5 = z^2 + 2z + 5$$

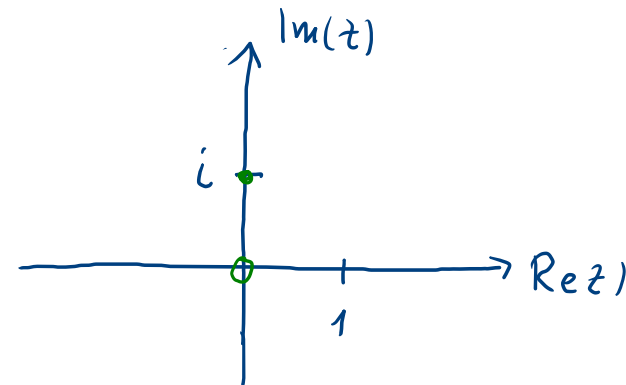
1.3.6 On considère la fonction complexe f définie sur $\mathbb{C} - \{-i\}$ par

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

- a) Déterminer le nombre complexe z tel que $f(z) = i$.
b) Trouver les éléments z invariants par f , c'est à dire l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) = z$.

a)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{array}$$



$$f(i) = 0, \quad f(2i) = \frac{i}{3i} = \frac{1}{3}$$

$$f(z) = i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z-i}{z+i} = i \quad z \neq i$$

$$z - i = i z + i^2$$

$$z - i z = i - 1$$

$$z(1-i) = -1+i \quad \left| \begin{array}{l} \div (1-i) \neq 0 \end{array} \right.$$

$$z = \frac{-1+i}{1-i}$$

$$z = \frac{-(1-i)}{1-i} = -1$$

Donc $f(-1) = i$

$$b) f(z) = z$$

$$\begin{array}{l|l} \text{On résout l'équation} & \frac{z-i}{z+i} = z \\ & \cdot (z+i) \\ & z-i = z(z+i) \\ & z-i = z^2 + iz \\ & -z^2 - iz + z - i = 0 \\ & z^2 + iz - z + i = 0 \\ & z^2 + (-1+i)z + i = 0 \end{array}$$

$$a=1, \quad b=-1+i, \quad c=i$$

$$D = (-1+i)^2 - 4i = 1-1-2i-4i = -6i = (a+bi)^2$$

$$\begin{array}{l} \text{Re} \\ \text{Module} \\ \text{Im} \end{array} \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 6 \\ 2ab = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 6 \\ 2b^2 = 6 \\ ab = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm \sqrt{3} \\ b = \pm \sqrt{3} \\ ab = -3 \end{cases}$$

Les racines de $-6i$ sont $\sqrt{3}-\sqrt{3}i$ et $-\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

$$z_1 = \frac{\overset{\bullet}{1} - \overset{\bullet}{i} + \overset{\bullet}{\sqrt{3}} - \overset{\bullet}{\sqrt{3}}i}{2} = \frac{\overset{\bullet}{1+\sqrt{3}} - (\overset{\bullet}{1+\sqrt{3}})i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \frac{\overset{\bullet}{1} - \overset{\bullet}{i} - \overset{\bullet}{\sqrt{3}} + \overset{\bullet}{\sqrt{3}}i}{2} = \frac{\overset{\bullet}{1-\sqrt{3}} - (\overset{\bullet}{1-\sqrt{3}})i}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

$$f(z_1) = z_1 \quad \text{et} \quad f(z_2) = z_2$$

Rappel sur les puissances

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $p, q \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\textcircled{1} \quad x^p \cdot x^q = x^{p+q}$$

$$\textcircled{2} \quad (x^p)^q = x^{p \cdot q} = (x^q)^p$$

$$\textcircled{3} \quad (x \cdot y)^p = x^p \cdot y^p$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$$

La forme exponentielle des nombres complexes

Si $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $z = [r; \theta]$ et $z' = [r'; \theta']$.

On sait que $z \cdot z' = [r; \theta] \cdot [r'; \theta'] = [r \cdot r'; \theta + \theta']$

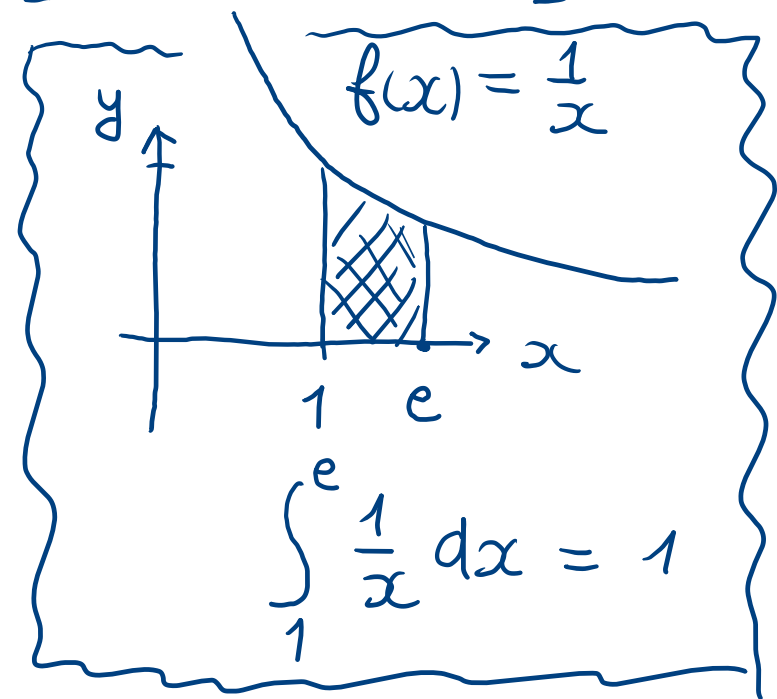
On note aussi $z = r \cdot e^{i\theta}$

où $e = 2,7182\dots$ le nombre d'Euler

$$z = r \cdot e^{i\theta}, \quad z' = r' \cdot e^{i\theta'}$$

$$z \cdot z' = r \cdot r' e^{i(\theta + \theta')}$$

$$= r e^{i\theta} \cdot r' e^{i\theta'} = r \cdot r' e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = r \cdot r' \cdot e^{i(\theta + \theta')}$$



1.5.2 Écrire sous forme ^{expo}(~~polaire~~) ($z = r \cdot e^{i\theta}$) les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 1 - i$

c) $z_3 = i$

e) $z_5 = -\sqrt{3} - i$

b) $z_2 = -1 + i$

d) $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$

Note : $z = r \cdot e^{i\theta} = r \cdot \text{cis}(\theta)$ = $r(\underline{\cos(\theta)} + i \underline{\sin(\theta)})$