

4.2.6 Résoudre les équations ci-dessous :

f) $\log_8(x+4) = 1 - \log_8(x-3)$ ⚠ Vérifie les solutions

$$\log_8(x+4) + \log_8(x-3) = 1$$

$$\log_8((x+4)(x-3)) = \log_8(8) \quad \log_a(u) = \log_a(v) \Leftrightarrow u=v$$

$$(x+4)(x-3) - 8 = 0$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$(x+5)(x-4) = 0$$

$$\downarrow$$

$$x = -5$$

$$\downarrow$$

$$x = 4$$

1) $x = -5$: $\log_8(-8)$ n'existe pas

2) $x = 4$:

$$\underbrace{\log_8(8)}_1 + \underbrace{\log_8(1)}_0 = 1$$

$$S = \{4\}$$

$$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a(a) = 1$$

4.2.14 Le modèle de Jenss est généralement considéré comme la formule la plus précise pour prévoir la taille d'un enfant en âge préscolaire. Si y est sa taille en cm et x son âge en années, on a $y = 79,041 + 6,39x - e^{3,261-0,993x}$. Quelle est, d'après ce modèle, la taille d'un enfant d'une année?

$$y = f(x)$$

$$f(x) = 79,041 + 6,39x - e^{3,261 - 0,993x}$$

y est la taille en cm en fonction de l'âge x en années

$$f(1) \approx 75,77 \text{ [cm]}$$

4.2.16 Dans l'étude de 15 villes ayant une population P allant de 300 à 3'000'000 d'habitants, on a déterminé que la vitesse moyenne v (en m/s) d'un piéton pouvait être donnée approximativement par $v = 0,0151 + 0,258 \log(P)$.

- a) Selon ce modèle, quel est la vitesse moyenne d'un piéton à Lausanne ($\sim 130'000$ habitants) ?
- b) Évaluer, à l'aide de cette formule, le nombre d'habitants nécessaire pour que la vitesse moyenne d'un piéton soit de 1,5 m/s.

$$v = v(P) \quad \begin{array}{l} v : \text{vitesse en m/s} \\ P : \text{population} \end{array}$$

$$a) \quad v(130'000) \cong 1,33 \text{ [m/s]}$$

$$b) \quad v(P) = 1,5 \text{ [m/s]}$$

$$\Leftrightarrow 0,0151 + 0,258 \log(P) = 1,5$$

$$0,258 \log(P) = 1,4849$$

$$\log(P) = \frac{1,4849}{0,258}$$

$$\Rightarrow P = 10^{1,4849/0,258}$$

$$P \cong 569\,411$$

4.2.17 La masse m (en kilogrammes) d'une éléphante d'Afrique à l'âge de t (années) peut être donnée approximativement par $m = 2'600(1 - 0,51e^{-0,057t})^3$.

- a) Donner approximativement sa masse à la naissance.
- b) Évaluer l'âge d'une éléphante d'Afrique ayant une masse de 1,8 tonnes.

$m = m(t) \quad [Kg] \quad , \quad t \text{ en années}$

a) $m = m(0) = 2600 (1 - 0,51)^3 = 2600 \cdot 0,49^3 \cong 305,8874 \text{ [Kg]}$

b) $m(t) = 1800 :$

$2600 (1 - 0,51 e^{-0,057t})^3 = 1800$

$(1 - 0,51 \cdot e^{-0,057t})^3 = \frac{9}{13}$

$1 - 0,51 \cdot e^{-0,057t} = \sqrt[3]{\frac{9}{13}}$

$1 - \sqrt[3]{\frac{9}{13}} = 0,51 \cdot e^{-0,057t}$

$\frac{1 - \sqrt[3]{\frac{9}{13}}}{0,51} = e^{-0,057t}$

$\ln\left(\frac{1 - \sqrt[3]{\frac{9}{13}}}{0,51}\right) = -0,057t$

$t = \frac{\ln\left(\frac{1 - \sqrt[3]{\frac{9}{13}}}{0,51}\right)}{-0,057} \cong 26.0763114439185$

L'âge est de 26 ans

÷ 2600

$\sqrt[3]{}$

÷ 0,51

$\ln(e^{-0,057t})$
||
 $-0,057t \cdot \underbrace{\ln(e)}_1$

Propriétés de log (suite et fin)

⑧ LOG LN

On aimerait calculer le $\log_a$, pour a quelconque ($a > 0, a \neq 1$)

$$x > 0 : \log_a(x) = \log_a\left(b^{\log_b(x)}\right)$$

$$\stackrel{⑦}{=} \log_b(x) \cdot \log_a(b)$$

Donc :

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Exemple : 1) $\log_{10}(1000) = \frac{\ln(1000)}{\ln(10)} = 3$

$$2) \log_8(10) = \frac{\log(10)}{\log(8)} \approx 1.1073093649625$$

$$3) \log_2(1000) = \frac{\log(1000)}{\log(2)} \stackrel{1.1073093649625}{8} = 10$$

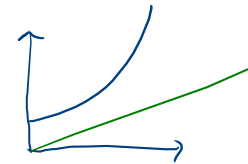
4.2.19 La population d'une culture bactérienne double toutes les 12 heures. Supposons que la population initiale est de 10'000 bactéries.

- Déterminer la relation qui représente la taille de la population N après t heures.
- Combien y aura-t-il de bactéries après une semaine?
- Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il triplé?



t [heures]	N # bactéries
0	10'000
12	20'000
24	40'000
36	80'000

$\times 2$
 $\times 2$



a) $N = N(t)$ modèle exponentielle

$$N(t) = 10'000 \cdot 2^{\frac{t}{12}}$$

Deuxième méthode : $N(t) = N_0 \cdot 10^{k \cdot t}$

 N_0 : valeur initiale en $t=0$

Déterminons N_0 et k :

• $N(0) = N_0 = 10'000$

• $N(12) = 20'000 \Leftrightarrow 10'000 \cdot 10^{\overset{12k}{k \cdot 12}} = 20'000$

$$10^{\overset{12k}{k \cdot 12}} = 2$$

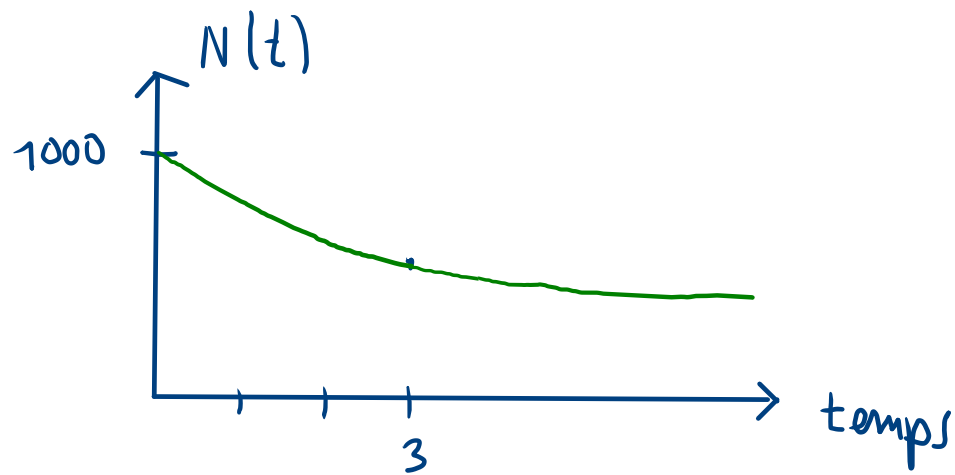
$$\overset{12k}{k \cdot 12} = \log(2) \Leftrightarrow k = \frac{\log(2)}{12}$$

$$N(t) = 10'000 \cdot 10^{\frac{\log(2) \cdot t}{12}}$$

$$= 10'000 \cdot \underbrace{\left(10^{\log(2)}\right)^{\frac{t}{12}}}_2 = 10'000 \cdot 2^{\frac{t}{12}}$$

4.2.20 Un étang contient 1'000 truites. Trois mois plus tard, il n'en reste que 600.

- A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer le nombre N de truites restantes après t mois.
- Combien y aura-t-il de truites dans l'étang après une année?
- Après combien de temps y en aura-t-il plus que 80?



2)
$$N(t) = 1000 e^{kt}$$

t	$N(t)$
0	1000
1	...
2	...
3	600

Test :

- 4.1
- 4.2.1 → 4.2.6

mercredi 2 septembre