

1.5.2 Écrire sous forme polaire ($z = r \cdot e^{i\theta}$) les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 1 - i$

c) $z_3 = i$

e) $z_5 = -\sqrt{3} - i$

b) $z_2 = -1 + i$

d) $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$

Note : $z = r \cdot e^{i\theta} = r \cdot \text{cis}(\theta)$

$$z = r e^{i\theta} = r \left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)$$

e) $z_5 = -\sqrt{3} - i$

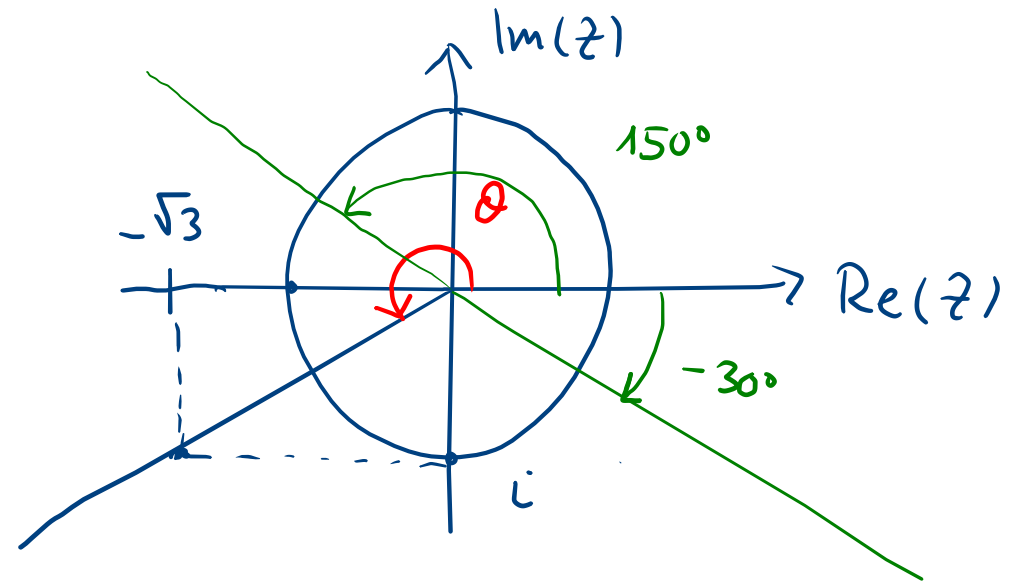
$r = 2$

$$\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta \approx \frac{7\pi}{6}$$

$$\sin(\theta) = -\frac{1}{2}$$

$$z_5 = \left[2; \frac{7\pi}{6} \right] = 2 e^{i \frac{7\pi}{6}}$$



1.5.3 Écrire sous forme cartésienne ($z = a + ib$) les nombres complexes suivants :

a) $w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

c) $w_3 = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

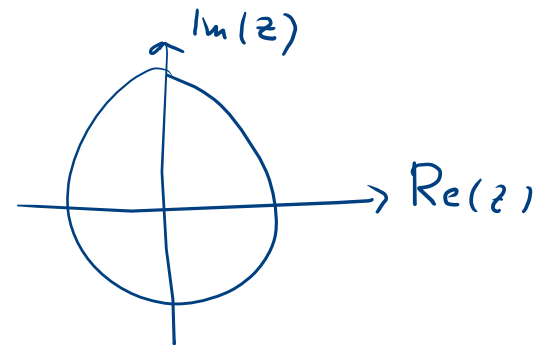
e) $w_5 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) $w_2 = 3e^{-2i\frac{\pi}{3}}$

d) $w_4 = 3e^{i\pi}$

f) $w_6 = e^{i\pi}$

f) $w_6 = e^{i\pi} = [1; \pi] = -1$



$$e^{i\pi} = -1$$

Pire nice

e) $w_5 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$

CRN: page 30

$$= \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i$$

α		$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0°	0	1	0	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	0	1	-

1.5.7 Calculer les racines cubiques de -8 .

$$\textcircled{1} \quad w = -8 = [8; \pi] = \underline{8 e^{i\pi}}$$
$$z = [r, \theta] \quad \text{tel} \quad z^3 = w \quad \dots$$

$$\textcircled{2} \quad w = 8 e^{i(\pi + 2k\pi)} \quad k = 0, 1, 2$$

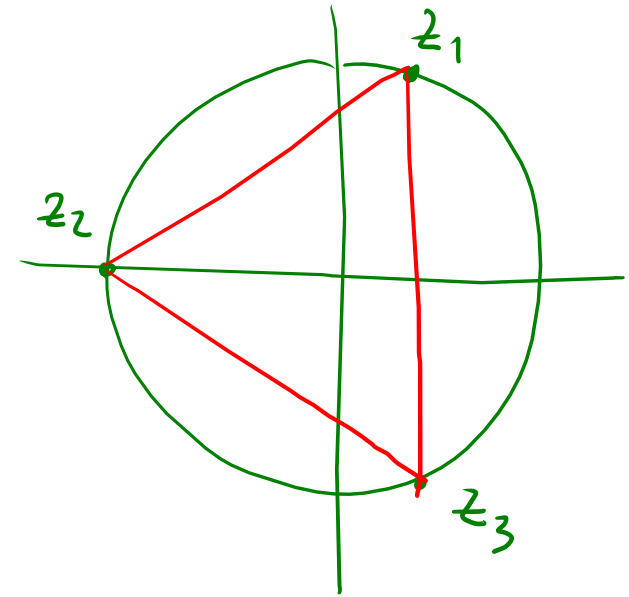
$$z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_2 = 2 e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2 e^{i\pi} = -2$$

$$z_3 = 2 e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2 e^{5\pi/3}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \overline{z_1}$$



1.5.1 Démontrer les formules suivantes. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$a) \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \checkmark, \quad |e^{i\theta}| = 1 \checkmark \quad \text{et} \quad (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$$

$$b) \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$a) \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)}$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \cos(-\theta) \\ -\sin(\theta) &= \sin(-\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{e^{i\theta}} &= \overline{\cos(\theta) + \sin(\theta)i} = \cos(\theta) - \sin(\theta)i \\ &= \cos(-\theta) + \sin(-\theta)i = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} \end{aligned}$$

$$\underline{(e^{i\theta})^{-1}} = e^{-i\theta} \quad [\text{propriété des puissances}]$$

$$\frac{1}{\underline{\cos(\theta) + \sin(\theta)i}} \cdot \frac{\cos(\theta) - \sin(\theta)i}{\cos(\theta) - \sin(\theta)i} = \frac{\cos(\theta) - \sin(\theta)i}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \frac{e^{-i\theta}}{1} = e^{-i\theta}$$

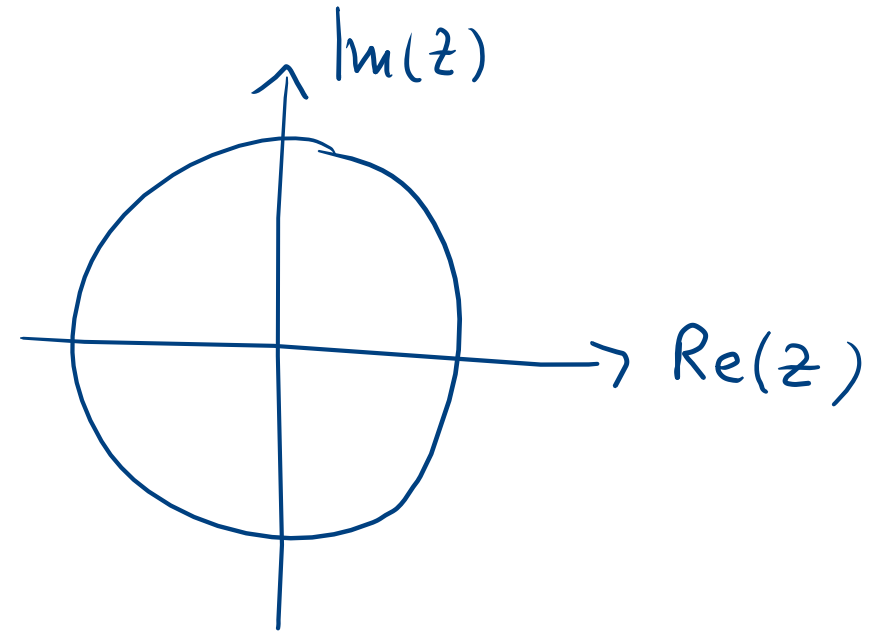
$$b) \frac{\underline{e^{i\theta}} + \underline{e^{-i\theta}}}{2} = \frac{\underline{\cos(\theta) + \cancel{\sin(\theta)i}} + \overbrace{\cos(-\theta)}^{\cos(\theta)} + \overbrace{\cancel{\sin(-\theta)i}}^{-\sin(\theta)i}}{2} = \cos(\theta)$$

1.5.8 Soit $w = 1 + i\sqrt{3}$.



a) Calculer w^9

b) Calculer $\bar{w}^{-10}$



$$\begin{aligned} a) \quad w &= r e^{i\theta} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= \left[2; \frac{\pi}{3} \right] \end{aligned}$$

$$w^9 = \left(2 e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^9 = 2^9 \cdot e^{i3\pi} = 512 \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} = -512$$

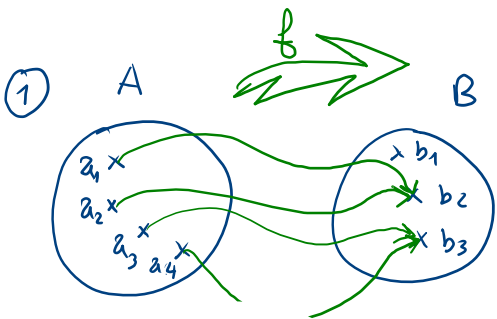
⚠ on ne calcule pas $(1+i\sqrt{3})^9$ directement !

Analyse

Une fonction réelle d'une variable réelle est une
correspondance entre deux ensembles A et B

qui à tout élément a de A fait correspondre
un et un seul élément b de B .

[A et B sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$]



② $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

③ $f: [1; 2] \rightarrow [2; 4]$
 $x \mapsto 2x$

⑤ $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_-$
 $x \mapsto -x + 1$

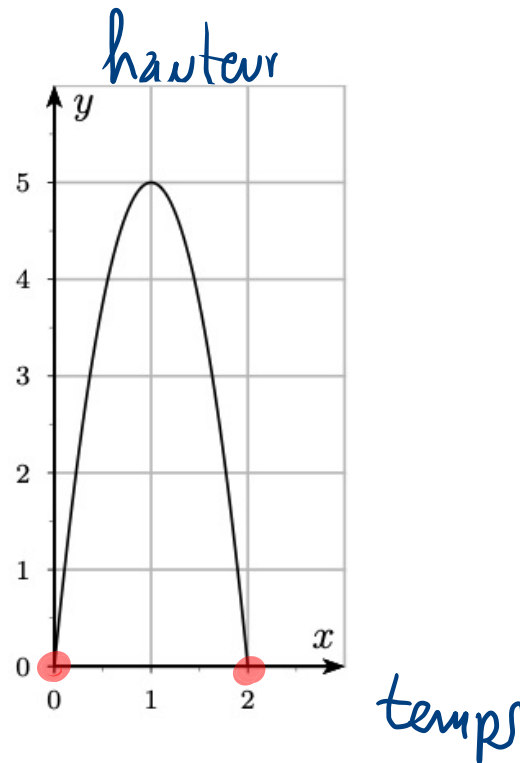
④ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$

$\sqrt{-1}$ n'existe
pas

⑥ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -2x+1, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
 $0 \mapsto \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

2.2 Lecture et interprétation de graphes

2.2.1 On a tracé ci-dessous le graphe d'une fonction f .



$$a \text{ est un zéro de } f \\ \Leftrightarrow f(a) = 0$$

- a) Déterminer graphiquement les zéros de f .
- b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$.
- c) Donner les coordonnées du maximum de f .

On suppose maintenant que $f(x)$ représente la hauteur (en mètres) d'une balle lancée verticalement depuis le sol, en fonction du nombre de secondes x écoulées depuis son lancer.

Interpréter par une phrase les trois réponses précédentes.