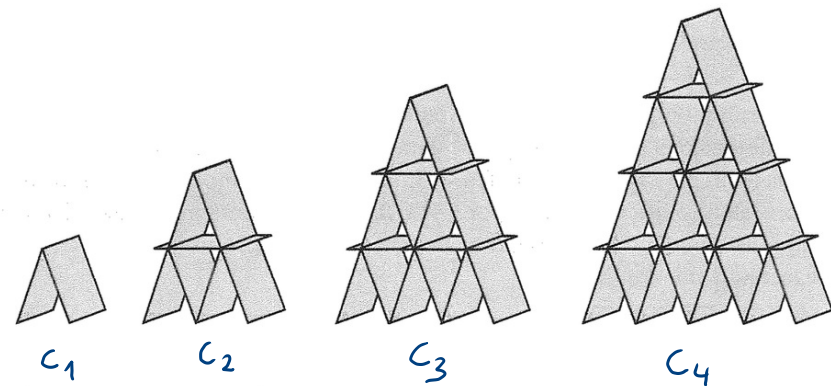


2.1.4 La construction d'un château de cartes à n étages nécessite c_n cartes.

02.10.26



$$f(n) = 3n + 2$$

a) Déterminer c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5 .

$$c_1 = 2$$

$$c_2 = 2 + (4 + 1) = 2 + 5 = 7$$

$$c_3 = 7 + (6 + 2) = 15$$

$$c_4 = 15 + (8 + 3)$$

b) Trouver une relation de récurrence du type $c_{n+1} = c_n + f(n)$

Pour passer de c_n à c_{n+1} , on ajoute un étage en bas.

$$c_{n+1} = c_n + 2(n+1) + (n+1) - 1 = c_n + (3n + 2)$$

c) Trouver une formule explicite pour c_n et démontrer cette formule par récurrence.

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_{n+1} = c_n + 3n + 2, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k + 2) = 2 + 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1) \\ &= \frac{\cancel{4} + 3n^2 - 3n + 4n - \cancel{4}}{2} \\ &= \frac{3n^2 + n}{2} = \frac{n(3n+1)}{2} \end{aligned}$$

Définition

Une suite de nombres réels est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

$$(u_n): \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

u_n est le terme de rang n .

Exemples : ① $(u_n): \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & 2n+1 \end{array}$

définition du terme général

$$u_0 = 1, \quad u_{10} = 21$$

② $(u_n):$

$$u_n: \quad \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \end{cases}, \quad n \geq 2$$

relation de récurrence

$$u_3 = 2, \quad u_4 = 3, \quad u_5 = 5, \quad u_6 = 8$$

suite de Fibonacci (1175 - 1240)

Formule de Binet
$$\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n} = u_n$$

2.2.1 Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n) définie par :

a) $u_n = \frac{n}{n+2}$, avec $n \geq 1$

b) $u_n = 1 + (-1)^n$, avec $n \geq 1$

c) $u_n = n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, avec $n \geq 1$

d) $u_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$, avec $n \geq 1$

RAD

2.2.2 Calculer les quatre premiers termes des suites :

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{a_n - 2}{3}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

2.2.3 Trouver les termes généraux des suites :

a) 4 7 10 13 16 ...

b) 2 8 18 32 50 ...

c) 1 $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$...

d) $-\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{6}$...

e) -3 9 -27 81 -243 ...

f) 1 $\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{3}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt[5]{5}$...

a) $u_n =$, $n \geq 1$

d) $u_n = \frac{n-2}{n+1}$, $n \geq 1$

2.2.4 Les suites ci-dessous sont-elles minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes?

a) $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$, avec $n \geq 1$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1,75; \quad a_3 = 2 - \frac{1}{9} = \frac{17}{9} \approx 1,888...; \quad a_4 = 2 - \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$$

$$(a_n) = \left(1; 1,75; 1,88...; 1,9375; \dots \right)$$

$$1 \leq a_n < 2$$

- 1 est un minorant
- 2 est un majorant

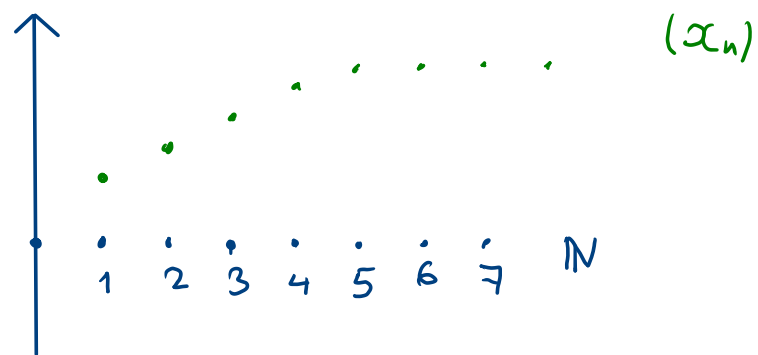
- l'ensemble des minorants $]-\infty; 1]$
- l'ensemble des majorants $[2; +\infty[$

Suites majorées, mineures et bornées

1) Une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est majorée, s'il existe $M \in \mathbb{R}$

tel que $x_n \leq M$, $\forall n \geq 1$

M est appelé un majorant de la suite



2) Une suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est mineure, s'il existe $m \in \mathbb{R}$

tel que $x_n \geq m$, $\forall n \geq 1$

m est appelé un minorant de la suite

Une suite mineure et majorée est bornée

Une suite (x_n) est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) $b_n = -n!$, avec $n \geq 1$

$$(b_n) = (-1; -2; -6; -24; \dots)$$

• minorée : non

• majorée : -1

• bornée : non

$$[-1; +\infty[$$

c) $c_n = 2n^2 - 7n$, avec $n \geq 2$

d) $d_n = \frac{n}{n^2 + 10}$, avec $n \geq 3$