

1.1.13 On considère une suite de n nombres $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Écrire les expressions suivantes de la manière la plus synthétique possible à l'aide d'un symbole de sommation.

- a) La somme des termes de cette suite de nombres.
- b) La somme des carrés des termes de cette suite de nombres
- c) Le carré de la somme des termes de cette suite de nombres
- d) La différence entre la somme des carrés et le carré de la somme des termes de cette suite de nombre

$$a) \sum_{k=1}^n x_k = S_1$$

$$c) \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = S_1^2$$

$$b) \sum_{k=1}^n x_k^2 = S_2$$

$$d) S_2 - S_1^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2$$

1.1.14

a) Produit de la somme des x_i et de la somme des y_i

$$2) \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j \right)$$

$$x_1, x_2, x_3 \quad ; \quad y_1, y_2 \quad \Rightarrow \quad (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2)$$

b) Somme des produits $x_i y_i$

c) Somme des y_i moins k fois la somme des x_i

$$b) \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\begin{aligned} & \kappa (x_1 + x_2 + x_3) \\ &= \kappa x_1 + \kappa x_2 + \kappa x_3 \end{aligned}$$

$$c) \quad \sum_{i=1}^n y_i - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (y_i - n x_i)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = m \cdot n$$

1.1.17 Soit $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ des nombres réels et $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Montrer que :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - m^2$$

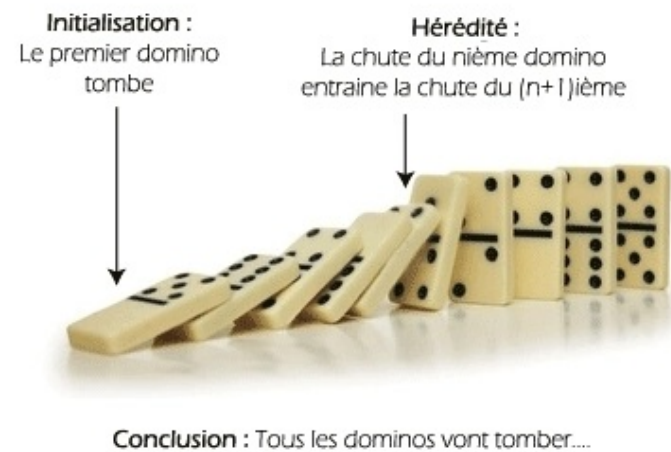
Exemple : $x_1 = 2$, $x_2 = 5,75$, $x_3 = 4,25$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$ $m = 3,8$

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (x_i - 3,8)^2 &= \frac{1}{5} \left[(2-3,8)^2 + (5,75-3,8)^2 + (4,25-3,8)^2 + (3-3,8)^2 + (4-3,8)^2 \right] \\ &= 1,585 \\ \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i^2 - 3,8^2 &= 1,585 \end{aligned}$$

Démontrons la formule :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i m + m^2) \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n 2x_i m + \sum_{i=1}^n m^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2m \sum_{i=1}^n x_i + m^2 \sum_{i=1}^n 1 \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2m \cdot nm + m^2 \cdot n \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2m^2 n + m^2 n \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - m^2 \cdot n \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - m^2 \end{aligned}$$

Récurrance



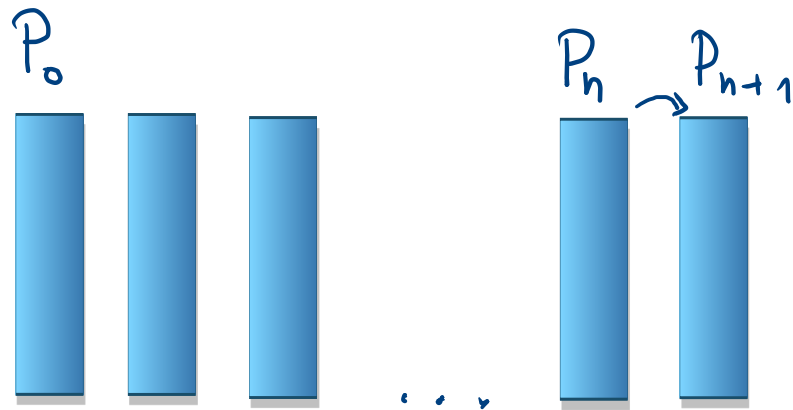
La démonstration par récurrence s'applique dans le cas où on doit démontrer une proposition P_n pour tout entier $n \geq 0$ ou $n \geq 1$ ou plus généralement $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$).

Une démonstration par récurrence se fait toujours en deux étapes :

- Première phase, dite d'initialisation : on démontre que la proposition est vraie pour la plus petite valeur de l'entier n : 0, 1 ou n_0 .
- Deuxième phase : on suppose que la proposition P_n est vraie et on démontre sous cette hypothèse, appelée hypothèse de récurrence, que la proposition P_{n+1} est vraie.

D'un point de vue formel, on peut écrire :

$$\begin{cases} P_0 \text{ est vrai} \\ n \geq 0 \text{ et } P_n \Rightarrow P_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \forall n \geq 0 : P_n \text{ est vrai}$$



1.2.1 Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$a) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{f}$$

$$P_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1^{ère} étape : Initialisation $P_0 = 1$

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 \quad ; \quad \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

2^{ème} étape : on suppose que la formule est vraie pour n et on la démontre pour $n+1$

$$\left(\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \underbrace{\sum_{k=1}^n k}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$b) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$P_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démontrons ce résultat par récurrence sur n .

1°) Initialisation. On démontre qu'elle est vraie pour $n=1$

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 \quad ; \quad n=1 \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

Elle est vraie pour $n=1$,

2°) Supposons la relation vraie pour n et démontrons-la pour $n+1$.

$$\left(\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \right)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left[\sum_{k=1}^n k^2 \right] + (n+1)^2 = \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

$$p = 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6$$

$$p(-1) = 0 \Rightarrow n+1 \mid p$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 9 & 13 & 6 \\ (-1) \nearrow & & -2 & -7 & -6 \\ \hline & 2 & 7 & 6 & 0 \end{array}$$

Ex 1.2.1 c) et a) 11.09.26