06.11.26

Convergence d'une suite

① $x_n = 2n + 1$, $n \geq 1$

$(x_n) = (3, 5, 7, 9, \dots)$

Plus n devient grand, plus x_n devient grand.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$$

Exemple : a) déterminer $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_n > 1000$.

b) Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_n > M$.

a) $2n + 1 > 1000 \iff 2n > 999 \iff n > \left[\frac{999}{2}\right] \iff n > 499$

$x_{500} = 1001 > 1000$

b) $2n + 1 > M \iff 2n > M - 1 \iff n > \left[\frac{M-1}{2}\right]$

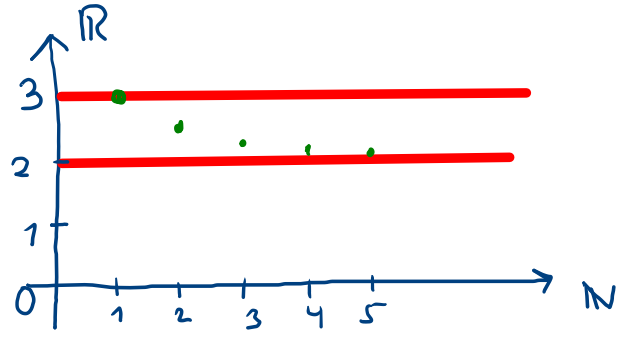
On dit que (x_n) diverge.

② $x_n = \frac{2n+1}{n}$, $n \geq 1$

$(x_n) = \left(3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \dots\right)$

- (x_n) est décroissante
- (x_n) est bornée

$2 < x_n \leq 3$



Cette suite est décroissante et minorée, elle admet une limite qui vaut $l = 2$

① Trouver N tel que $|x_n - 2| < 0,1$, pour $n > N$

② Trouver N tel que $|x_n - 2| < 10^{-10}$, pour $n > N$

① $\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-2n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} < 0,1 \iff \frac{1}{n} < \frac{1}{10} \iff n > 10$

$x_{11} = \frac{23}{11}$, $\frac{23}{11} - 2 = \frac{23-22}{11} = \frac{1}{11} < \frac{1}{10} = 0,1$

② $\frac{1}{n} < 10^{-10} \iff \frac{1}{n} < \frac{1}{10^{10}} \iff n > 10^{10}$

$N = 10^{10}$, $n > 10^{10}$, $|x_n - 2| < \frac{1}{10^{10}}$

Définition

Soit une suite (U_n) infinie.

Un nombre réel l est appelé limite de la suite (U_n), et on note $\lim_{n \to \infty} U_n = l$, si U_n est arbitrairement proche de l dès que n est suffisament grand.

Lorsqu'un suite infinie admet un nombre limite, on dit que la suite converge. Dans le cas contraire, on dit qu'elle diverge.

Exemples

suites convergentes	suites divergentes
• $x_n = \frac{2n+1}{n}$	• $x_n = 2n + 1$
• $x_n = 2^{-n}$	• $x_n = 2^n$
• $x_n = 6$	• $x_n = \sin(n)$ alternée
	• $x_n = \tan(n)$

2.2.5 Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et $\epsilon > 0$. Si on accepte que la suite converge vers L, trouver le plus petit entier positif N tel que $\mid u_n - L \mid < \epsilon$, pour tout $n > N$.

a) $u_n = \dfrac{3}{n-2}$, avec $L = 0$ et $\epsilon = 0,1$

b) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, avec $L = 1$ et $\epsilon = 0,25$

En considérant ϵ quelconque, démontrer que les suites ci-dessus sont convergentes.

Définition

Une suite infinie (u_n) converge vers le nombre L, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N qui dépend de ε, tel que $|u_n - L| < \varepsilon$ pour tout $n > N$.

a) $u_n = \dfrac{3}{n-2}$, avec $L = 0$ et $\epsilon = 0,1$

① $\left| \frac{3}{n-2} - 0 \right| < 0,1$, $n > 2$

$\frac{3}{n-2} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 30 < n-2 \Leftrightarrow n > 32$

Si $N = 32$, $\forall n > N$, $|u_n| < 0,1$

② $\left| \frac{3}{n-2} - 0 \right| < \varepsilon$, $n > 2$

$\frac{3}{n-2} < \varepsilon$ | $\cdot (n-2)$ $n > 2$

$3 < \varepsilon (n-2)$ | $\div \varepsilon$

$\frac{3}{\varepsilon} < n-2$ | $+2$

$\frac{3}{\varepsilon} + 2 < n$

$n > 2 + \frac{3}{\varepsilon}$

$n > \frac{2\varepsilon + 3}{\varepsilon}$

Choisissons $N = \left[\frac{2\varepsilon + 3}{\varepsilon} \right]$

Pour tout $n > N$, on a $|u_n - 0| < \varepsilon$

Revenons à $\varepsilon = 0,1$, $N = \left[\frac{0,2+3}{0,1} \right] = \left[\frac{3,2}{0,1} \right] = 32$