

11.09.26

1.2.1 Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$d) \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \quad P_n$$

① InitialisationJe démontre que la relation est vraie pour $n = 1$.

$$\bullet \sum_{k=1}^1 (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^2 \cdot 1^2 = 1$$

$$\bullet (-1)^2 \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

② On suppose la relation est vraie pour n et on la démontre pour $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2}_{P_n} + (-1)^{n+2} (n+1)^2$$

$$= \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}}_{P_n} + (-1)^{n+2} (n+1)^2$$

$$= (-1)^{n+1} \underbrace{(n+1)}_{(n+1)} \left[\frac{n}{2} + (-1)^1 (n+1) \right]$$

$$= (-1)^{n+1} (n+1) \left[\frac{n - 2n - 2}{2} \right] = (-1)^{n+1} (n+1) \left(\frac{-n-2}{2} \right)$$

$$= \underbrace{(-1)^{n+1}}_{(-1)^{n+2}} (n+1) \underbrace{(-1)}_{(-1)} \frac{(n+2)}{2} = (-1)^{n+2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} := P_{n+1}$$

$$e) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad P_n$$

① La relation est vraie pour $n = 1$.

$$\bullet \sum_{k=1}^1 \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$$\bullet \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

② On suppose la relation vraie pour n et on la démontre pour $n+1$.

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} \right)$$

$P_n \quad \Rightarrow \quad P_{n+1}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}}_{\frac{n}{2n+1}} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\ &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{n(2n+3) + 1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{\cancel{(2n+1)}(n+1)}{\cancel{(2n+1)}(2n+3)} = \frac{n+1}{(2(n+1)+1)} := P_{n+1} \end{aligned}$$

1.2.6 Écrire en fonction de n la somme des carrés des n premiers nombres impairs.

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n+1)^2 = \frac{4}{3}n^3 - \frac{4}{3}n =$$

$$= \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$$

$$\begin{array}{lcl} n=1 & : & \begin{cases} a+b+c+d = 1 \\ 8a+4b+2c+d = 10 \\ 27a+9b+3c+d = 35 \\ 64a+16b+4c+d = 84 \end{cases} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7a+3b+c = 9 \\ 19a+5b+c = 25 \\ 37a+7b+c = 49 \\ a+b+c+d = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12a+2b = 16 \\ 18a+2b = 24 \\ 7a+3b+c = 9 \\ a+b+c+d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+b = 8 \\ 9a+b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 0 \\ c = 9 - \frac{28}{3} = -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} + 0 - \frac{1}{3} + d = 1 \Rightarrow d = 0 \end{cases}$$

Nous devons démontrer que

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

1.2.2 a) } vendredi 18.09.26
1.2.9