

1.2.2 Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

a) $8^n - 1$ est divisible par 7

$$P_n : 7 \mid 8^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1°) Initialisation : $n = 0 \quad 7 \mid 8^0 - 1 = 0$

2°) On suppose $8^n - 1$ est divisible par 7 et je démontre que $8^{n+1} - 1$ est divisible par 7.

En effet : Il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $8^n - 1 = 7K \Leftrightarrow 8^n = \underline{7K + 1}$

$$\begin{aligned} 8^{n+1} - 1 &= 8 \cdot \underline{8^n} - 1 = 8(\underline{7K + 1}) - 1 = 8 \cdot 7K + 8 - 1 = 56K + 7 \\ &= 7(8K + 1) \end{aligned}$$

Donc $8^{n+1} - 1$ est un multiple de 7, donc $8^{n+1} - 1$ est divisible par 7

1.2.9 Trouver l'erreur commise dans la démonstration ci-dessous :

On note P_n l'assertion « $\forall n \in \mathbb{N}^*, (6 \text{ divise } 7^n + 1)$ ».

Prouvons que 6 divise $7^n + 1$. Supposons que P_n est vraie. Alors il existe k tel que $7^n + 1 = 6k$. Ainsi, $7^{n+1} + 1 = 7 \cdot 7^n + 1 = 7(6k - 1) + 1 = 42k - 6 = 6(7k - 1)$. Par conséquent 6 divise $7^{n+1} + 1$, i.e. P_{n+1} est vraie. Par récurrence, P_n est vraie pour tout n .

Initialisation manquante

1.2.10 Trouver l'erreur commise dans la démonstration ci-dessous :

Prouvons que tout le monde a la même taille. On pose $P_n = \ll n \text{ personnes ont toujours la même taille} \gg$. Cette fois on n'oublie pas d'initialiser : une personne a la même taille qu'elle-même, donc P_1 est vraie.

L'hérédité ensuite. Soit $n > 1$ et supposons que P_n est vraie. On considère alors $n + 1$ personnes. Les personnes 1 jusqu'à n ont la même taille, par hypothèse de récurrence. De même, les personnes 2 jusqu'à $n + 1$ ont la même taille. Ainsi, ces $n + 1$ personnes ont la même taille.

$P_n = \ll n \text{ personnes ont toujours la même taille} \gg$

$\{1\}, \{2, \dots, n\}$

$\{1, \dots, n\}$

$\{2, \dots, n+1\}$

b) $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est un multiple de 7

c) $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est un multiple de 111

b) Initialisation :

① La relation est vraie pour $n = 0$. En effet :

$$3^2 - 2^1 = 9 - 2 = 7 \text{ est un multiple de 7}$$

② $P_n := 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est un multiple de 7

On suppose que $3^{2h+2} - 2^{h+1}$ est divisible par 7.

Démontrons que $3^{2(h+1)+2} - 2^{(h+1)+1}$ est divisible par 7.

Il existe $K \in \mathbb{N}$, tel que $3^{2h+2} - 2^{h+1} = 7K$.

$$\text{Donc } 3^{2h+2} = 7K + 2^{h+1}$$

$$3^{2(h+1)+2} - 2^{h+2} = 3^{2h+2} \cdot 3^2 - 2^{h+2} = 9 \cdot (7K + 2^{h+1}) - 2^{h+2}$$

↑
Par hyp. de
réurrence

$$= 9 \cdot 7K + 9 \cdot \underline{2^{h+1}} - 2^{h+2} = 9 \cdot 7K + 2^{h+1} (9 - 2)$$

$$= 9 \cdot 7K + 2^{h+1} \cdot 7 = 7 \cdot (9K + 2^{h+1}) \text{ qui est un multiple de 7.}$$

1.2.7 Démontrer que « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - n + 41$ est premier » est une proposition fausse.

$$P_n := \forall n \in \mathbb{N}, n^2 - n + 41 \text{ est premier}$$

$$n=0: \quad 41 \text{ est premier}$$

$$n=1: \quad 41$$

$$n=2: \quad 4 - 2 + 41 = 43 \text{ est premier}$$

$$\vdots$$

$$n=41: \quad 41^2 - 41 + 41 = 41 \cdot 41 \text{ qui n'est pas premier.}$$

1.2.8 Démontrer que « $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n \text{ est premier} \Rightarrow 2^n - 1 \text{ est premier})$ » est une proposition fausse.

$$n = 11; \quad 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047 = 89 \cdot 23$$

d) $n^3 + 5n$ est divisible par 3 $\forall n \in \mathbb{N}^*$

① vraie pour $n=1$: $1+5=6=3 \cdot 2 \checkmark$

② $n^3 + 5n$ est divisible par 3 $\Rightarrow (n+1)^3 + 5(n+1)$ est divisible par 3.

$\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n^3 + 5n = 3k$.

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = n^3 + 3n^2 + 8n + 6 =$$

$$n^3 + 5n + \underbrace{3n^2 + 3n + 6}_{3 \cdot (n^2 + n + 2)} = 3k + 3 \cdot k' = 3(k+k') \text{ qui est}$$

divisible par 3.

d) $n^3 + 5n$ est divisible par 3

$P_n := \forall n \in \mathbb{N} \quad n^3 + 5n \text{ est divisible par } 3$