

Sommes

21.08.26

OS

Effectuons les calculs suivants

$$\textcircled{1} \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \sum_{K=1}^{10} K = 55$$

$$\textcircled{2} \quad 1 + 2 + \dots + 1000 = \sum_{i=1}^{1000} i = \sum_{j=1}^{1000} j$$

$$\textcircled{3} \quad 1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = \sum_{K=1}^{10} K^2$$

Euler : Somme : $\sum$ symbole de sommation

$$\textcircled{4} \quad 2 + 4 + 8 + \dots + 126 = \sum_{j=1}^{63} 2j = 2 \left(\sum_{j=1}^{63} j \right)$$

1.1.1 On donne

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 2 \quad \text{et} \quad x_5 = 7.$$

Calculer :

$$\text{a) } \sum_{i=1}^5 x_i = \text{c) } \sum_{k=1}^5 x_k$$

$$\text{b) } \sum_{i=2}^4 x_i \quad \text{d) } \sum_{j=1}^5 x_j^3$$

$$\text{e) } \sum_{i=1}^5 (x_i + 8) = 23 + 40$$

$$\text{f) } \sum_{k=1}^5 (8 \cdot x_k) = 8 \cdot 23$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{i=1}^5 x_i &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ &= 3 + 5 + 6 + 2 + 7 = 23 \end{aligned}$$

i : indice de sommation

$$\begin{aligned} \text{e) } \sum_{i=1}^5 (x_i + 8) &= x_1 + \underline{8} + x_2 + \underline{8} + x_3 + \underline{8} + x_4 + \underline{8} + x_5 + \underline{8} \\ &= \sum_{i=1}^5 x_i + \underline{5 \cdot 8} = \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \sum_{k=1}^5 (8x_k) &= 8x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 8x_4 + 8x_5 \\ &= 8(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 8 \cdot \sum_{k=1}^5 x_k \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n (\alpha x_k) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^n x_k$$

1.1.3 Développer les sommes suivantes

a) $\sum_{i=0}^n (-1)^i$

b) $\sum_{j=0}^n 3j$

c) $\sum_{k=1}^n n$

d) $\sum_{i=1}^n \frac{n}{i}$

a) $\sum_{i=0}^n (-1)^i = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1)^n$
 $\quad \quad \quad i=0 \quad \quad i=1 \quad \quad i=2 \quad \quad i=3 \quad \quad \quad \quad i=n$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

b) $\sum_{j=0}^n 3j = 3 \sum_{j=0}^n j = 3 \underbrace{(0 + 1 + 2 + \dots + n)}_S = \frac{3n(n+1)}{2}$

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$S = n + n-1 + \dots + 1$$

$$2S = n \cdot (n+1) \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^n j = \frac{n(n+1)}{2}}$$

c) $\sum_{k=1}^n n = n + n + n + \dots + n = n^2$
 $\quad \quad \quad n=1 \quad 2 \quad 3 \quad \quad \quad n$

d) $\sum_{i=1}^n \frac{n}{i} = n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) = n \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)}_{\text{Série harmonique}}$

1.1.5 Développer et calculer les sommes suivantes :

$$\text{c) } \sum_{k=-n}^n (k+1) = \underbrace{(-n+1)}_{K=-n} + \underbrace{(-n+1+1)}_{K=-n+1} + \underbrace{(-n+2+1)}_{K=-n+2} + \dots + \underbrace{(n+1)}_{K=n}$$

$$= (-n+1) + (-n+2) + (-n+3) + \dots + (n+1)$$

$$= \underbrace{\sum_{K=-n}^n K}_{=0} + \underbrace{\sum_{K=-n}^n 1}_{=2n+1}$$

$$= 0 + 2n+1$$

Vendredi $\rightarrow 1, 1, 5$