

2.1.1 Un patient doit prendre une fois par jour un médicament composé de 12 mg de cermoxène. L'expérience a montré que le corps humain élimine en 24 heures la moitié de la dose de cermoxène qu'il contient.

Quelle sera la quantité de ce produit contenu dans le corps du patient 1 jour ? 2 jours ? 3 jours ? ... n jours après le début du traitement ?

U_n : quantité du produit contenu dans le corps n jours après le début du traitement.

$$U_0 = 12 \quad [\text{mg}]$$

$$U_1 = 12 + \frac{1}{2} \cdot 12 = 12 + 6 = 18$$

$$U_2 = 12 + \frac{1}{2} \cdot 18 = 12 + 9 = 21$$

$$U_3 = 12 + \frac{1}{2} \cdot 21 = 12 + 10,5 = 22,5$$

$$U_4 = 12 + \frac{1}{2} \cdot 22,5 = 12 + 11,25 = 23,25$$

$\downarrow +6$

$\downarrow +3$

$\downarrow +1,5$

$\downarrow +0,75$

On définit une suite récurrente :

$$(U_n) : \begin{cases} U_0 = 12 \\ U_{n+1} = 12 + \frac{1}{2} \cdot U_n \end{cases}$$

Si cette suite converge vers une limite l , on doit avoir

$$\begin{aligned} l &= 12 + \frac{1}{2} l \\ \Leftrightarrow l &= 24 \quad [\text{mg}] \end{aligned}$$

Posons $V_n = U_n - 24$ 😊

$$\boxed{V_{n+1} = U_{n+1} - 24} = 12 + \frac{1}{2} U_n - 24 = \frac{1}{2} U_n - 12$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n = V_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad [\text{suite géométrique de raison } \frac{1}{2}]$$

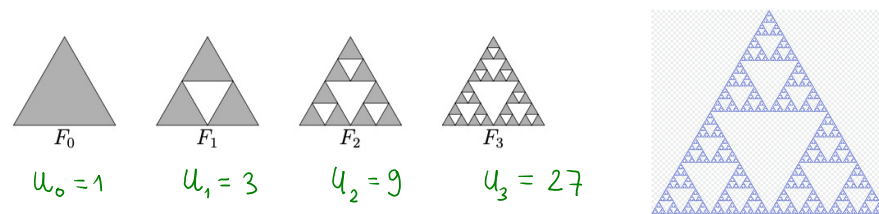
Calculons $V_0 = U_0 - 24 = -12$

Ainsi : $U_n = V_n + 24 = 24 - 12 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 24 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Donc $\boxed{U_n = 24 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$

Donc, à long terme, la quantité de médicament dans le corps se stabilise à 24 mg.

2.1.2 On considère une suite de figures formées de triangles équilatéraux :



$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 3$$

$$u_2 = 9$$

$$u_3 = 27$$

a) Combien de triangles sont grisés dans F_n ?

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3 \cdot u_n \end{cases} \Rightarrow u_n = 3^n \quad \# \text{ triangles grisés}$$

b) Sur quelle figure a-t-on pour la première fois plus de 1 000 000 triangles grisés ?

$$3^n > 10^6$$

$$\text{On résout } 3^n = 10^6$$

$$\log(3^n) = \log(10^6)$$

$$n \cdot \log(3) = 6 \Leftrightarrow n = \frac{6}{\log(3)} \simeq 12,58$$

Donc, c'est sur la figure F_{13} qu'on dépasse pour la première fois 10^6 triangles.

c) Si l'aire grisée de F_0 est 1, quelle est l'aire grisée dans F_1 ? dans F_2 ?

Trouver une formule pour l'aire grisée dans F_n .

Vers quelle valeur tend l'aire grisée de F_n lorsque n devient très grand ?

$$V_0 = 1 \quad V_1 = \frac{3}{4} \quad V_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad V_3 = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(u_n) = \left(1, \frac{3}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2, \dots, \left(\frac{3}{4}\right)^n, \dots\right)$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Comme $0 < \frac{3}{4} < 1$, le terme $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ tend vers 0

lorsque n tend vers l'infini.

2.1.3 Après avoir mis la machine à calculer en mode radian, introduire un nombre réel quelconque et appliquer à plusieurs reprises la fonction cosinus.

Observer la suite de nombres qui apparaît à l'écran. Commenter ce résultat.

$$u_0 = 887$$

$$u_1 = \cos(887)$$

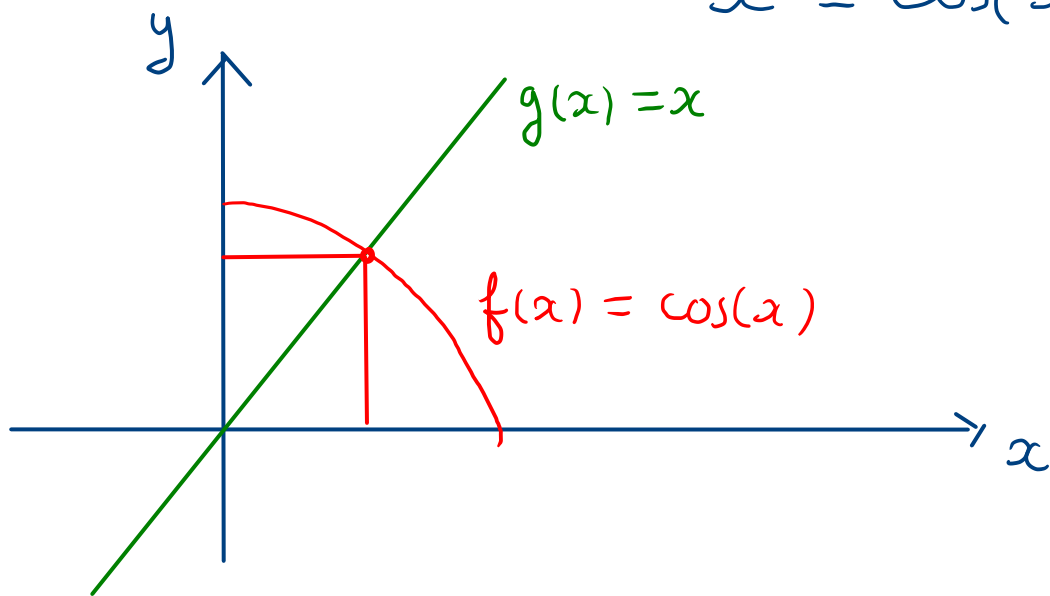
$$u_2 = \cos(u_1)$$

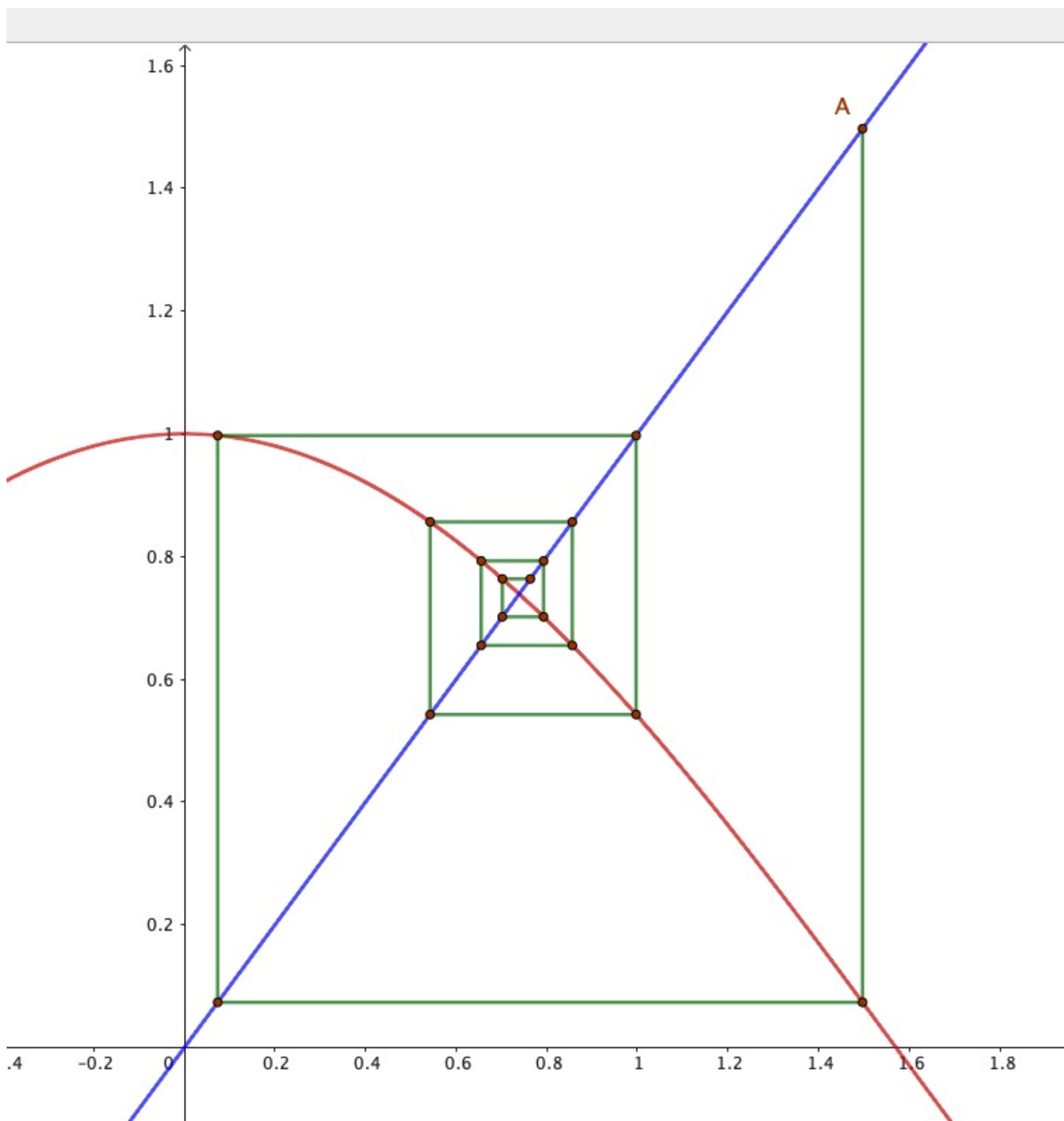
$$\begin{cases} u_0 = N \\ u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$$

Il semble que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.7390851332151607$.

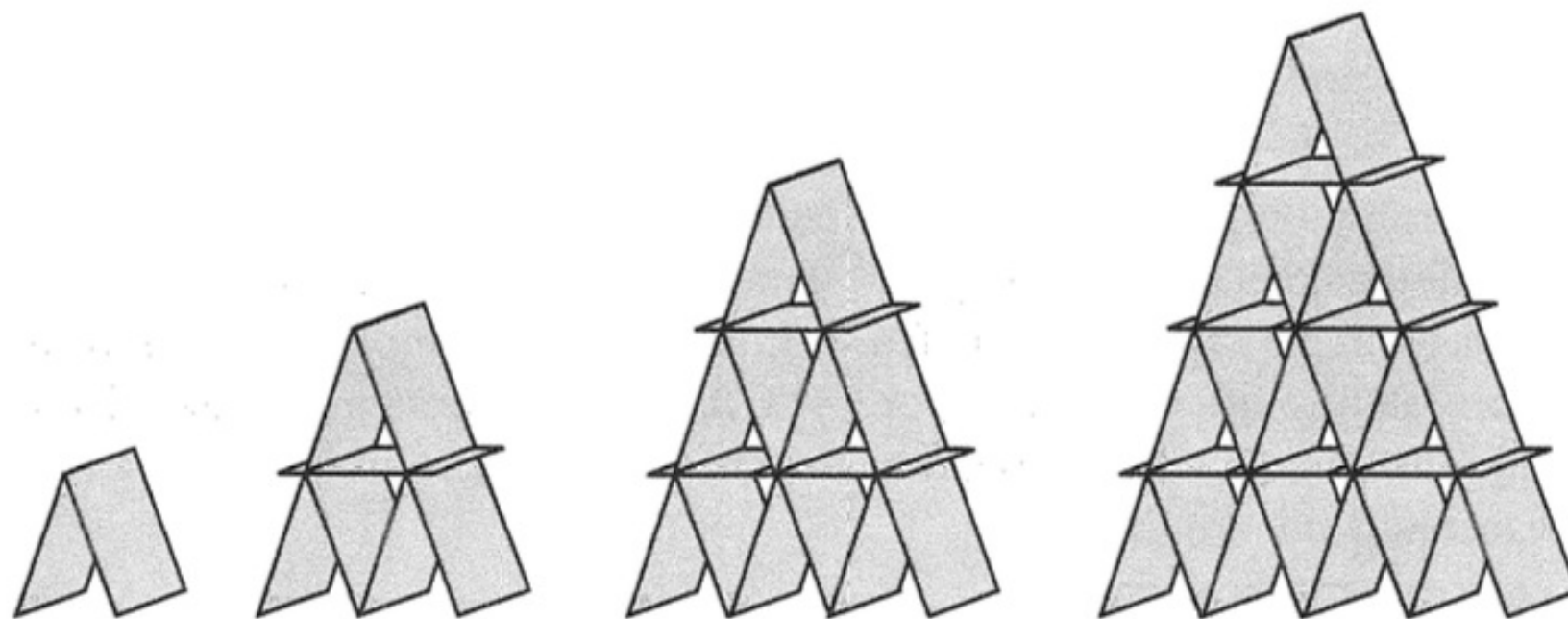
Si x est la limite, on doit avoir :

$$x = \cos(x)$$





2.1.4 La construction d'un château de cartes à n étages nécessite c_n cartes.



a) Déterminer c_1 , c_2 , c_3 , c_4 et c_5 .

b) Trouver une relation de récurrence du type $c_{n+1} = c_n + f(n)$