

1.1.6 Soit $x_1, \dots, x_n$ une suite de nombres réels. Calculer $\sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) &= (\underbrace{x_2 - x_1}_{i=2}) + (\underbrace{x_3 - x_2}_{i=3}) + (\underbrace{x_4 - x_3}_{i=4}) + \dots \\ &\quad + (\underbrace{x_{n-1} - x_{n-2}}_{i=n-1}) + (\underbrace{x_n - x_{n-1}}_{i=n}) \\ &= x_n - x_1 \end{aligned}$$

1.1.4 Développer chacune des sommes écrites à l'aide du symbole Σ , en faisant disparaître ce symbole :

$$\text{a) } \sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k^2}$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2k+1}$$

$$\text{c) } \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)!}{k}$$

$$\text{c) } \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)!}{k} = \frac{2!}{1} + \frac{3!}{2} + \frac{4!}{3} + \frac{5!}{4} + \dots + \frac{n!}{n-1} + \frac{(n+1)!}{n}$$

$k=1$ $k=2$ $k=3$ $k=n-1$ $k=n$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

1.1.8 Ecrire les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ .

j) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{9}{10} + 32 =$

$$\sum_{k=1}^9 \frac{k}{k+1} + 32$$

Formules

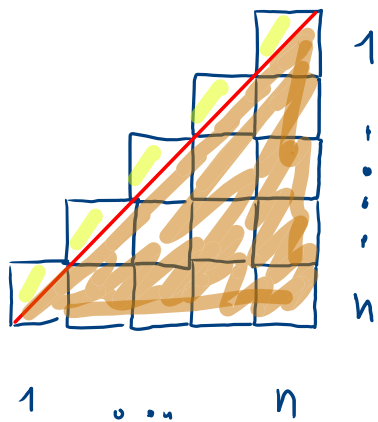
But : Calculer

$$\textcircled{1} \quad S_1 = \sum_{k=1}^n k$$

$$\textcircled{2} \quad S_2 = \sum_{k=1}^n k^2$$

$$\textcircled{3} \quad S_3 = \sum_{k=1}^n k^3$$

$\textcircled{1}$ Géométriquement



$$S_1 = \boxed{\frac{n^2}{2}} + \boxed{\frac{n}{2}} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\textcircled{1.1}$

$$S_1 = \boxed{1} + \boxed{2} + \dots + \boxed{n}$$

$$S_1 = \boxed{n} + \boxed{n-1} + \dots + \boxed{1}$$

$$2S_1 = n \cdot (n+1) \Rightarrow \boxed{S_1 = \frac{n(n+1)}{2}}$$

② La somme des n premiers carrés

$$S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$\begin{array}{l} (n+1)^3 \\ n^3 \\ (n-1)^3 \\ \vdots \\ 2^3 \\ 1^3 \end{array} = \begin{array}{l} n^3 \\ (n-1)^3 \\ (n-2)^3 \\ \vdots \\ 1^3 \end{array} + \begin{array}{l} 3n^2 \\ 3(n-1)^2 \\ 3(n-2)^2 \\ \vdots \\ 3 \cdot 1^2 \end{array} + \begin{array}{l} 3n \\ 3(n-1) \\ 3(n-2) \\ \vdots \\ 3 \cdot 1 \end{array} + \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array}$$

$$(n+1)^3 + \cancel{S_3} = \cancel{S_3} + 3 \cdot S_2 + 3 \cdot S_1 + (n+1)$$

$$(n+1)^3 = 3 \cdot S_2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3S_2 + \frac{3}{2}(n^2 + n) + n + 1 \quad | \cdot 2$$

$$\underline{2n^3} + \underline{6n^2} + \underline{6n} + \underline{1} = 6S_2 + \underline{3n^2} + \underline{3n} + \underline{2n} + \underline{1}$$

$$6S_2 = 2n^3 + 3n^2 + n$$

$$S_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

$$S_2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$