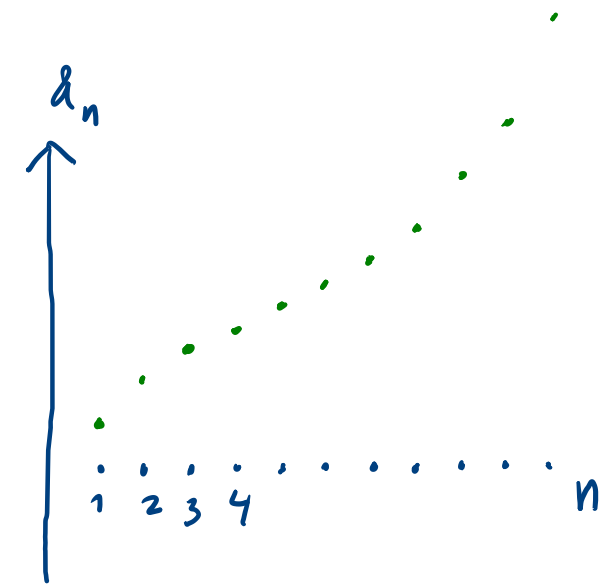
# Suites croissantes

Une suite est croissante $(a_n)$ si :

$$a_{n+1} - a_n \geq 0$$




Une suite est strictement croissante si

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

On définit aussi les suites décroissantes

30.10.26

**2.2.4** Les suites ci-dessous sont-elles minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes ?

a) $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$, avec $n \geq 1$ $\qquad a_n = \frac{2n^2-1}{n^2}$

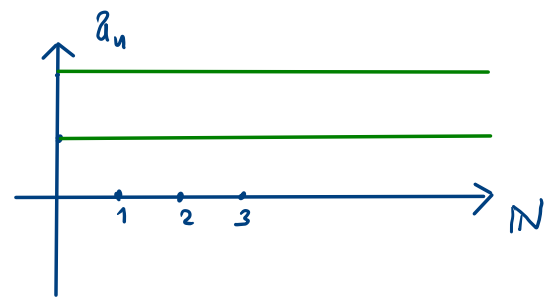
$$(a_n) = \left(1 ; \frac{7}{4} ; \frac{17}{9} ; \frac{31}{16} ; \dots\right)$$

① Cette suite est minorée et majorée :

$n \geq 1 \quad n^2 \geq 1 \iff 0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 \iff 0 > -\frac{1}{n^2} \geq -1 \iff 2 > 2 - \frac{1}{n^2} \geq 1$

$\Rightarrow \quad 1 \leq a_n < 2$

donc la suite est bornée




② Etudions la croissance de $a_n$ :

$$a_{n+1} - a_n = \left(2 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{\cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2}}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0 \quad , \quad n \geq 1$$

Ainsi $(a_n)$ est strictement croissante.

b) $b_n = -(n!)$, avec $n \geq 1$

$0! = 1$ par définition

$1! = 1$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \qquad n \geq 2$

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

① Minorée, majorée. $(b_n) = (-1, -2, -6, \ldots)$

- $b_n = -n! \leq -1$ majorée
- $n! \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \Rightarrow -n! \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ pas minorée

} pas bornée

② Croissance.

$b_{n+1} - b_n = -(n+1)! - (-n!) = n! - (n+1)!$

$= n! - \underbrace{(n+1) \cdot n!}_{(n+1)!} = n! \left[1 - (n+1)\right] = -n \cdot n! < 0$

strictement décroissante

c) $c_n = 2n^2 - 7n$, avec $n \geq 2$

$(c_n) = (-6\,;\ -3\,;\ 4\,;\ 15\,;\ldots)$

① Minorée, majorée

$c_n = 2n^2 - 7n = n(2n-7) \geqslant n$, pour $n \geq 4$ pas majorée

$(c_n)$ minorée par $-6$

② Croissance

$c_{n+1} - c_n = \left[2(n+1)^2 - 7(n+1)\right] - \left[2n^2 - 7n\right]$

$= 2n^2 + 4n + 2 - 7n - 7 - 2n^2 + 7n = 4n - 5 \geq 3 > 0, \quad n \geq 2$

$(c_n)$ est croissante

d) $d_n = \dfrac{n}{n^2+10}$, avec $n \geq 3$

$$(d_n) = \left( \frac{3}{19} ; \frac{4}{26} ; \frac{5}{35} ; \dots \right)$$

① Bornée

$$0 < \frac{n}{n^2+10} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \quad , \quad n \geq 3$$

$$0 < d_n < 1$$ Bornée

② Croissance

$$d_n - d_{n+1} = \frac{n}{n^2+10} - \frac{n+1}{(n+1)^2+10} = \frac{n}{n^2+10} - \frac{n+1}{n^2+2n+11}$$

$$= \frac{n(n^2+2n+11) - (n+1)(n^2+10)}{(n^2+10)(n^2+2n+11)}$$

$$= \frac{n^3+2n^2+11n - n^3 - n^2 - 10n - 10}{(n^2+10)(n^2+2n+11)}$$

$$= \frac{n^2+n-10}{(n^2+10)(n^2+2n+11)} > 0$$

| $x$ | | $\frac{-1-\sqrt{41}}{2}$ | | $\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-10$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Etudions le signe $n^2+n-10$

Ses zéros : $\Delta = 41$ $\quad n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{41}}{2} = \begin{cases} + \\ - \end{cases}$ $\begin{matrix} \sim 2,7 \\ -3,7 \text{ impossible} \end{matrix}$

| $n$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|
| $n^2+n-10$ | | $0$ | $+$ |

$\Rightarrow$ $(d_n)$ est décroissante

e) $e_n = 3^{1+(-1)^n}$, avec $n \geq 1$

f) $\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = 1 + 2f_n \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

e) $(e_n) = (1 ; 9 ; 1 ; 9 ; \dots)$

$$e_n = \begin{cases} 1 & \text{, si } n \text{ est impair} \\ 9 & \text{, si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

bornée, ni croissante, ni décroissante

f) $(f_n) = (1 ; 3 ; 7 ; 15 ; 31 ; \dots)$

Cela suggère que $f_n = 2^n - 1$

Démontrons ce résultat par récurrence.

① Initialisation : $n=1$ : $f_1 = 2^1 - 1 = 1$

② Supposons que $f_n = 2^n - 1$ et démontrons que $f_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$$f_{n+1} = 1 + 2f_n = 1 + 2 \cdot (2^n - 1) = 1 + 2^{n+1} - 2 = 2^{n+1} - 1$$

Strictement croissante, non bornée ...