3M6 – 16 février 2021 Nom : .....

Géométrie V – TE n° 757

Problème 1 (13 points – Gymnase de Beaulieu juin 2017)

Relativement à un repère orthonormé de l'espace, on considère :

- le point $P(-3;1;2)$,
- le plan π d'équation $(\pi) : 3x - 2y + 6z - 5 = 0$,
- la droite d donnée par $(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,
- la sphère Σ d'équation $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 + 12\,x - 8\,y + 6\,z + 12 = 0$.

2 a) Déterminer le centre C_1 et le rayon r_1 de la sphère Σ.

4 b) Montrer que Σ est tangente au plan π et déterminer une équation du plan π_2 tangent à Σ et parallèle à π.

3 c) Calculer la distance du point P à la droite d.

4 d) Il existe deux sphères centrées sur la droite d, de rayon 14 et tangentes au plan π. Trouver leur centre.

a) $x^2+12x + y^2-8y + z^2+6z = -12+36+16+9$

$(x+6)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 49$

$C_1(-6;4;-3)$, $r_1 = 7$

b) $\delta(C_1,\pi) = \dfrac{|3\cdot(-6) - 2\cdot 4 + 6\cdot(-3) - 5|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \dfrac{|-49|}{\sqrt{49}} = 7 = r_1$

$\delta(C_1,\pi) = r_1 \Rightarrow \pi$ tangent à Σ

$\pi_2 // \pi \Rightarrow (\pi_2)\ 3x - 2y + 6z + d = 0$

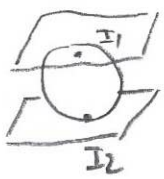
$\delta(C_1,\pi_2) = 7 \Rightarrow \dfrac{|3\cdot(-6) - 2\cdot 4 + 6\cdot(-3) + d|}{7} = 7$

$\Rightarrow |d-44| = 49 \Rightarrow \begin{cases} d-44 = 49 \Rightarrow d_2 = 93 \\ d-44 = -49 \Rightarrow d_1 = -5 \end{cases} \Rightarrow \pi$

$(\pi_2) : 3x - 2y + 6z + 93 = 0$

$I_1(-3;2;3)$

$I_2(-9;6;-9)$



c) $\delta(P,d) = \dfrac{\|\vec{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{\sqrt{258}}{\sqrt{129}} = \sqrt{2}$

$\vec{AP} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$;

$\vec{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$

d) Soit $T(8+11k ; -2k, 5+2k)$ le centre cherché.

On a : $\delta(T,\pi) = 14$

$|3(8+11k) - 2(-2k) + 6(5+2k) - 5| = 7 \cdot 14$

$\Leftrightarrow |24 + 33k + 4k + 30 + 12k - 5| = 98$

$\Leftrightarrow |49k + 49| = 2 \cdot 49 \Leftrightarrow |k+1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -3 \end{cases}$

$T_1(19 ; -2 ; 7)$ et $T_2(-25 ; 6 ; -1)$

Problème 2 (5 points)

Soit la sphère $(\Sigma) : (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 = 100$ et le plan $(\pi) : 2x-2y-z+9=0$.

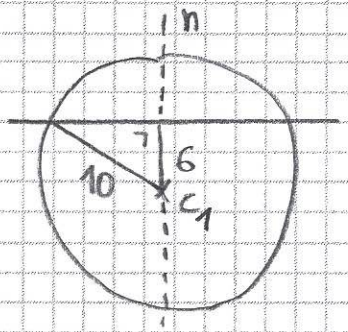
a) Prouver que le plan π coupe la sphère Σ.

b) L'intersection de π et Σ est un cercle γ ; déterminer son centre C et son rayon r.

2) π coupe $\Sigma \Leftrightarrow \delta(C_1;\pi) \leq 10$

$$\delta(C_1(3;-2;1),\pi) = \frac{|2\cdot 3 - 2\cdot(-2) - 1 + 9|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|18|}{3} = 6 < 10$$

b)



Rayon du cercle :

$$r = \sqrt{10^2-6^2} = 8$$

Déterminons son centre : $(n) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Intersection n et π : $2(3+2k) - 2(-2-2k) - (1-k) + 9 = 0$

$$4k + 6 + 4 + 4k - 1 + k + 9 = 0$$

$$9k + 18 = 0$$

$$k = -2$$

$\Rightarrow C(-1;2;3)$