

Géométrie de l'espace – TE 857A

Problème	1	2	3	4	5	6	Total
Points	2	2	5	10	5	9	33
Points obtenus							

Problème 1 (2 points)

Former une équation paramétrique matricielle de la droite d qui passe par le point A et qui est parallèle au vecteur $\vec{v}$.

$$A(2; -3; 0) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(d): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Problème 2 (2 points)

Former une équation cartésienne du plan α passant par le point R et de vecteur normal $\vec{n}$.

$$R(0; 0; 1) \quad \text{et} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha): -x + 2y + 3z + d = 0$$

$$\text{Par } R: 0 + 0 + 3 + d = 0 \Rightarrow d = -3$$

$$(\alpha): -x + 2y + 3z - 3 = 0$$

Problème 3 (5 points)

On donne un point $A(1; 1; -1)$ et deux vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- a) Déterminer un système d'équations paramétriques du plan α passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
- b) Déterminer une équation cartésienne du plan α .

$$\begin{aligned} &2) \\ (a): &\begin{cases} x = 1 + k - t \\ y = 1 - k + 2t \\ z = -1 + 2k + t \end{cases}, k, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$b) \begin{cases} x = 1 + k - t \\ y = 1 - k + 2t \\ z = -1 + 2k + t \end{cases} \begin{array}{c|c} k & k \\ \hline \cdot 1 & \cdot 2 \\ \cdot 1 & \\ \hline & \cdot (-1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 + t \\ 2x - z = 3 - 3t \end{cases} \begin{array}{c|c} t & t \\ \hline \cdot 3 & \\ \cdot 1 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (a): \underline{5x + 3y - z - 9 = 0}$$

Problème 4 (10 points)

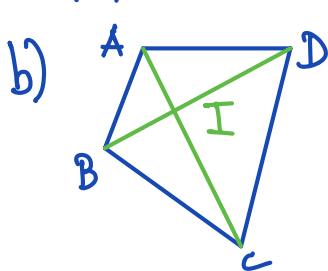
Soit les points $A(1; 3; 2)$, $B(4; -1; 3)$, $C(4; 9; -7)$ et $D(1; 8; -3)$.

- a) Montrer que les points A , B , C et D appartiennent à un même plan qu'on nommera α .
 b) Calculer les coordonnées du point I , intersection des diagonales du quadrilatère $ABCD$.

$$a) \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} - \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cup \vec{AD}$$

Donc $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont colinéaires. Les points A, B, C, D sont coplanaires



$$\vec{AC} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(AC): \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 3 + 2k \\ z = 2 - 3k \end{cases}$$

$$(BD): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + k = 4 + t \\ 3 + 2k = -1 - 3t \\ 2 - 3k = 3 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - t = 3 \\ 2k + 3t = -4 \\ -3k - 2t = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} k & t \\ \cdot (-2) & \cdot 3 \\ \cdot 1 & \cdot 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} t \\ \cdot 3 \\ \cdot t \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t = -10 \\ 5k = 5 \\ 3k + 2t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ k = 1 \\ 3 - 4 = -1 \checkmark \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

Le point $I(2; 5; -1)$

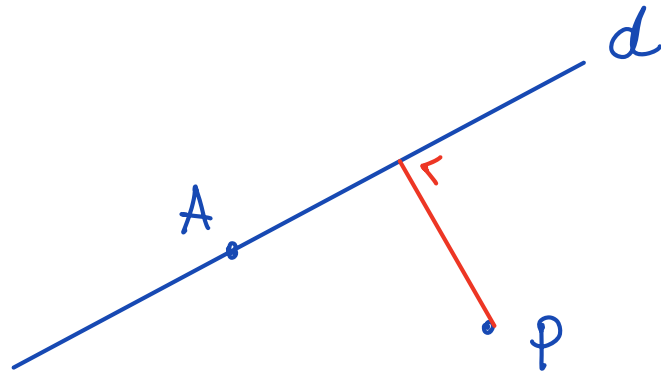
Problème 5 (5 points)

On donne le point $P(3; 2; -1)$ et la droite $(d) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Calculer la distance exacte du point P à la droite d .

$$A(-1; -3; -3) \in d$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$s(A, d) = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{AP} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$s(A, d) = \frac{9}{3} = 3$$

Problème 6 (9 points)

Soit les éléments suivants :

— le plan $(\alpha) : 4x - 3y - 9 = 0$

— le point $A(3; 1; 7)$

— le plan $(\beta) : 3x + 4y - 13 = 0$

— le point $D(6; 4; 2)$

- a) Montrer que les plans α et β sont perpendiculaires.
b) Vérifier que le point A appartient à la droite d , intersection des plans α et β .
c) Déterminer une représentation paramétrique vectorielle de la droite d .
d) Déterminer une équation cartésienne du plan γ , perpendiculaire à la fois à α et β , et passant par le point D .

a) vecteur normal à α : $\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$
vecteur normal à β : $\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$

b) A dans α : $4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 9 = 0 \checkmark$
 A dans β : $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 13 = 0 \checkmark \Rightarrow A \in \alpha \cap \beta$

c) $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \kappa \in \mathbb{R}$

d) Par C : $z + d = 0$
Par le point D : $\underline{z - 2 = 0}$

Géométrie de l'espace – TE 857B

Problème	1	2	3	4	5	6	Total
Points	2	2	5	10	5	9	33
Points obtenus							

Problème 1 (2 points)

Former une équation paramétrique matricielle de la droite d qui passe par le point P et qui est parallèle au vecteur $\vec{v}$.

$$P(3; 0; -2) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(d): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Problème 2 (2 points)

Former une équation cartésienne du plan β passant par le point T et de vecteur normal $\vec{n}$.

$$T(1; 0; 0) \quad \text{et} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha): x - 2y + 3z + d = 0$$

$$\text{Par } R: 1 + d = 0 \Rightarrow d = -1$$

$$(\alpha): x - 2y + 3z - 1 = 0$$

Problème 3 (5 points)

On donne un point $A(1; -1; 1)$ et deux vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- a) Déterminer un système d'équations paramétriques du plan α passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
- b) Déterminer une équation cartésienne du plan α .

$$\begin{aligned} & 2) \\ (a): & \begin{cases} x = 1 + k + t \\ y = -1 - k - 2t \\ z = 1 - 2k + t \end{cases}, k, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$b) \begin{cases} x = 1 + k + t \\ y = -1 - k - 2t \\ z = 1 - 2k + t \end{cases} \begin{array}{c|c} k & k \\ \hline \cdot 1 & \cdot 2 \\ \cdot 1 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -t \\ 2x + z = 3 + 3t \end{cases} \begin{array}{c|c} t & \\ \hline \cdot 3 & \\ \cdot 1 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (a): \underline{5x + 3y + z - 3 = 0}$$

Problème 4 (10 points)

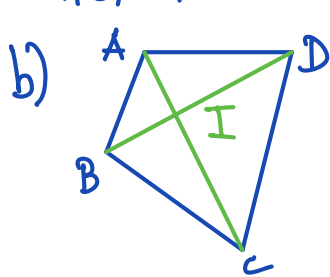
Soit les points $A(1; 3; 2)$, $B(4; -1; 3)$, $C(4; 9; -7)$ et $D(1; 8; -3)$.

- a) Montrer que les points A , B , C et D appartiennent à un même plan qu'on nommera α .
b) Calculer les coordonnées du point I , intersection des diagonales du quadrilatère $ABCD$.

$$a) \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} - \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cup \vec{AD}$$

Donc $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont colinéaires. Les points A, B, C, D sont coplanaires



$$\vec{AC} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(AC): \begin{cases} x = 1 + K \\ y = 3 + 2K \\ z = 2 - 3K \end{cases} \quad (BD): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + K = 4 + t \\ 3 + 2K = -1 - 3t \\ 2 - 3K = 3 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K - t = 3 \\ 2K + 3t = -4 \\ -3K - 2t = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} K & t \\ \cdot (-2) & \cdot 3 \\ \cdot 1 & \cdot t \end{vmatrix} \begin{matrix} t \\ \cdot 3 \\ \cdot t \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t = -10 \\ 5K = 5 \\ 3K + 2t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ K = 1 \\ 3 - 4 = -1 \checkmark \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

Le point $I(2; 5; -1)$

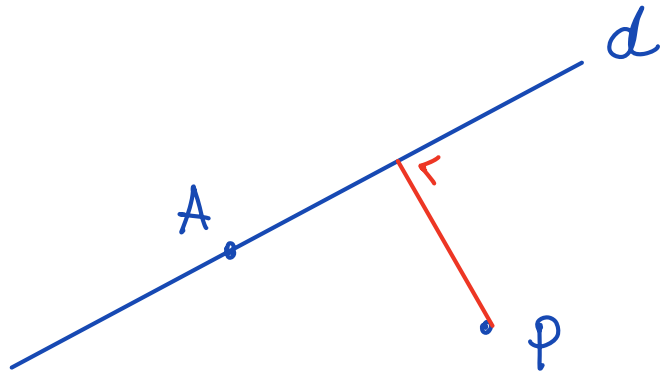
Problème 5 (5 points)

On donne le point $P(3; 2; -1)$ et la droite $(d) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Calculer la distance exacte du point P à la droite d .

$$A(-1; -3; -3) \in d$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$S(A, d) = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{AP} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$S(A, d) = \frac{9}{3} = 3$$

Problème 6 (9 points)

Soit les éléments suivants :

— le plan $(\alpha) : 4x - 3y - 9 = 0$

— le point $A(3; 1; 7)$

— le plan $(\beta) : 3x + 4y - 13 = 0$

— le point $D(6; 4; 2)$

- a) Montrer que les plans α et β sont perpendiculaires.
b) Vérifier que le point A appartient à la droite d , intersection des plans α et β .
c) Déterminer une représentation paramétrique vectorielle de la droite d .
d) Déterminer une équation cartésienne du plan γ , perpendiculaire à la fois à α et β , et passant par le point D .

a) vecteur normal à α : $\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$
vecteur normal à β : $\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \Rightarrow \alpha \perp \beta$

b) A dans α : $4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 9 = 0$ ✓
 A dans β : $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 13 = 0$ ✓ $\Rightarrow A \in \alpha \cap \beta$

c) $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \kappa \in \mathbb{R}$

d) Par C : $z + d = 0$

Par le point D : $z - 2 = 0$
