3M14 – Vendredi 30 octobre 2026 Nom & prénom : . . . . . .

Géométrie de l'espace – TE 861

Problème	1	2	**Total**
Points	10	20	30
Points obtenus			

Problème 1 (10 points)

Déterminer l'équation de la sphère Σ qui passe par les points $A(4;2;-3)$ et $B(-1;3;1)$ et qui a son centre sur la droite (d) : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Voir 3.6.11 d)

Problème 2 (20 points)

Relativement à un repère orthonormé $(O; E_1; E_2; E_3)$, on donne :

- la sphère Σ_1 d'équation : $(x-6)^2 + (y+8)^2 + z^2 = 100$,
- la sphère Σ_2 d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 20x + 12y - 8z + 136 = 0$,
- la droite t d'équation : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$,
- ainsi que le point $T(6; -2; 8)$.

2 a) Déterminer les coordonnées du centre C_2 et le rayon de Σ_2.

2 b) Montrer que les sphères Σ_1 et Σ_2 sont tangentes.

3 c) Montrer que la droite t est tangente à Σ_1 en T.

4 d) Trouver une équation de la droite d tangente à Σ_1 en T et perpendiculaire à la droite t.

5 e) Déterminer les coordonnées des points de contact A_1 et A_2 des plans normaux à t et tangents à Σ_1. Donner une équation de chacun de ces deux plans.

4 f) Montrer que le plan α d'équation $2x + y + 2z = 22$ intersecte la sphère Σ_1 en un cercle γ. Déterminer les coordonnées du centre et le rayon de γ.

Problème 2

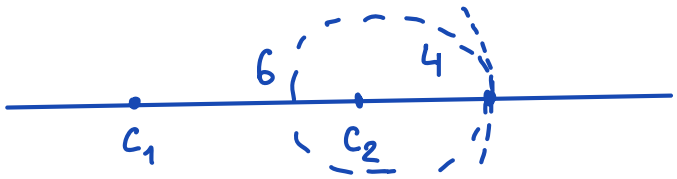
2) $(x-10)^2 + (y+6)^2 + (y-4)^2 = -136 + 100 + 36 + 16$
$= 16$

$C_2(10; -6; 4)$ et $R_2 = 4$

b) $C_1(6; -8; 0)$ et $R_1 = 10$

$\vec{C_1C_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \|\vec{C_1C_2}\| = 6$

$\|\vec{C_1C_2}\| + R_2 = R_1$



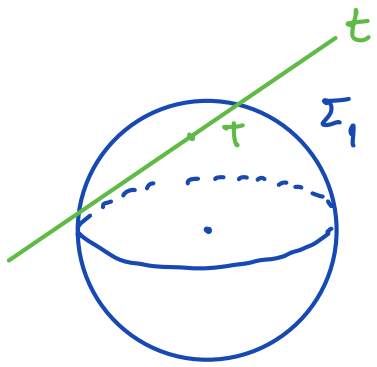
c) $\vec{C_1T} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad \|\vec{C_1T}\| = 10 = R_1$

$\Rightarrow T \in \Sigma_1$

Pour $K = 2$ dans t : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \vec{OT}$

$\Rightarrow T \in t$

d)



$T \in \Sigma_1$? ou question c)

$0^2 + 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow T \in \Sigma_1$

$\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{C_1T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\vec{t} \times \vec{C_1T}$ est un vecteur directeur de d

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32+18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(d): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Les plans s'écrivent : $(\beta): 4y - 3z + d = 0$

$$S(C_1, \beta) = 10 \Rightarrow \frac{|4 \cdot (-8) - 3 \cdot 0 + d|}{5} = 10$$

$$\Rightarrow |d - 32| = 50 \Rightarrow d = -18 \text{ ou } d = 82$$

$(\beta_1): 4y - 3z - 18 = 0$

$(\beta_2): 4y - 3z + 82 = 0$

On détermine A_1 : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

dans β_1 : $4(-8+4k) - 3(-3k) - 18 = 0$

$-32 + 16k + 9k - 18 = 0$

$25k = 50 \Rightarrow k = 2$

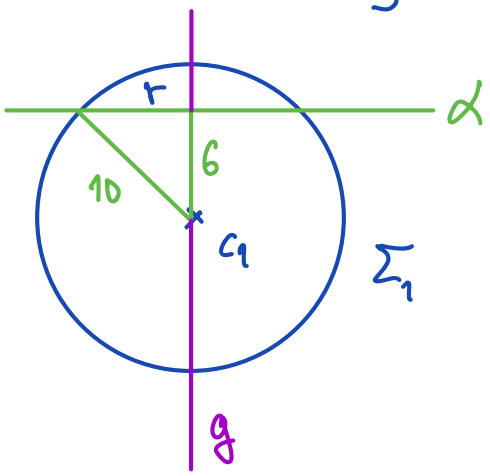
$\Rightarrow A_1(6; 0; -6)$

On détermine A_2 : C_1 est le milieu de A_1A_2

$A_1(6;0;-6)$; $C_1(6;-8;0)$; $\underline{A_2(6;-16;6)}$

f) (α) : $2x+y+2z-22=0$

$$S(C_1,\alpha)=\frac{|12-8-22|}{3}=\frac{18}{3}=6<R_1$$



$r=\sqrt{10^2-6^2}=8$ rayon de γ

$$(g):\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-8\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

dans α : $12+4k-8+k+4k-22=0$

$9k=18 \Rightarrow k=2$

centre de γ : $(10;-6;4)$