

$\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[t]$

01.10.28

1.2.8

$$V \subset E_{ev}, \quad V \neq \emptyset$$

$$\bullet \forall u, v \in V \quad u + v \in V$$

$$\bullet \forall u \in V, \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda u \in V$$

c) $C = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) = 2\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[t]$?

$$C : x^2, x^2 + x + 1, -3x^2 + \sqrt{2}, \dots$$

$$\bullet \begin{array}{ccc} (x^2 + 1) & + & (-x^2 + 1) = 2 \\ \mathbb{A} & & \mathbb{A} \\ C & & C \end{array}$$

$$\bullet p = 0 \notin C$$

1.2.10 Montrer que l'ensemble $A = \{(x; y; z; t) | x = 2y + z \text{ et } t = 5x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

• $u, v \in A$, montrons que $u + v \in A$

$$u = (x_1, y_1, z_1, t_1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2y_1 + z_1 \\ t_1 = 5x_1 \end{cases}$$

$$v = (x_2, y_2, z_2, t_2) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2y_2 + z_2 \\ t_2 = 5x_2 \end{cases}$$

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$$

$$(i) \quad 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = \underbrace{(2y_1 + z_1)}_{x_1} + \underbrace{(2y_2 + z_2)}_{x_2} = x_1 + x_2$$

$$(ii) \quad 5(x_1 + x_2) = 5x_1 + 5x_2 = t_1 + t_2$$

• $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (x, y, z, t) \in A$

$$\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$$

$$2 \cdot \lambda y + \lambda z = \lambda(2y + z) = \lambda x$$

$$5 \lambda x = \lambda \cdot 5x = \lambda t$$

Famille libre de vecteurs

La famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel est **libre** si toute combinaison linéaire égale au vecteur nul

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls,

c'est-à-dire $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Dans le cas contraire, on dit qu'elle est liée.

Exemples

$$1) \mathcal{F}_1 = \left((1; 0), (0; 1) \right) \quad \text{libre}$$

$$(\lambda_1; \lambda_2) = \lambda_1 (1; 0) + \lambda_2 (0; 1) = (0; 0)$$

$$2) \mathcal{F}_2 = \left((1; 2), (2; 4) \right)$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2; 2\lambda_1 + 4\lambda_2) = \lambda_1 (1; 2) + \lambda_2 (2; 4) = (0; 0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2$$

$$3) \mathcal{F}_3 = \left((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1) \right) \quad \text{libre}$$

$$\lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 (1, 1, 0) + \lambda_3 (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(\lambda_1, 0, 0) + (\lambda_2, \lambda_2, 0) + (\lambda_3, \lambda_3, \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$$

$$4) \mathcal{F}_4 = \left((-1, 5), (2, -8), (5, 6) \right) \quad \boxed{\text{liée}}$$

$$\lambda_1 (-1, 5) + \lambda_2 (2, -8) + \lambda_3 (5, 6) = (0, 0)$$

$$(-\lambda_1, 5\lambda_1) + (2\lambda_2, -8\lambda_2) + (5\lambda_3, 6\lambda_3) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 5\lambda_1 = 0 \\ 5\lambda_1 - 8\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

Système homogène

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$$

$$\cup \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 31 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \end{matrix}$$

$$\cup \begin{pmatrix} 1 & 0 & 26 \\ 0 & 1 & \frac{31}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -26K \\ \lambda_2 = -\frac{31}{2}K \\ \lambda_3 = K \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 52, \lambda_2 = 31, \lambda_3 = -2$$

$$(-1, 5), (2, -8), (5, 6)$$

$$(-52, 260) + (62, -248) + (-10, -12) = (0, 0)$$

1.2.12 Montrer que les familles suivantes de $\mathbb{R}^n$ sont libres :

a) $((1; -1; 1); (0; 2; -1))$

b) $((0; 1); (1; 1))$

c) $((2; 1; 0); (0; 1; -1))$

d) $((-1; 3); (0; 2))$

e) $((\pi; 0); (0; e))$

f) $((2; 4); (2; 5))$

g) $((1; 1; 0); (1; 1; 1); (0; -1; 1))$

h) $((0; 1; 1); (0; 1; 3); (1; 3; 5))$

