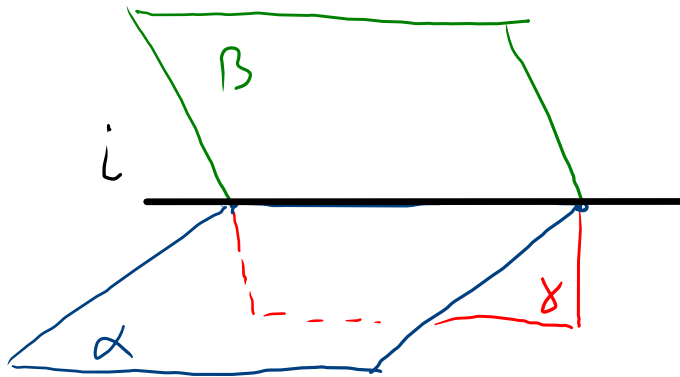


3.5.15 Démontrer que les plans d'équations $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$ et $x + 2y + 3z - 1 = 0$ ont une droite commune dont on donnera les équations cartésiennes.

$$(\alpha) : 7x + 4y + 7z + 1 = 0 \quad \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

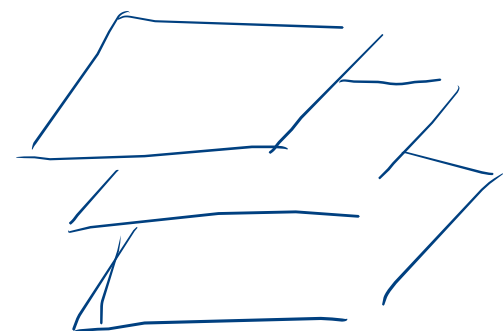
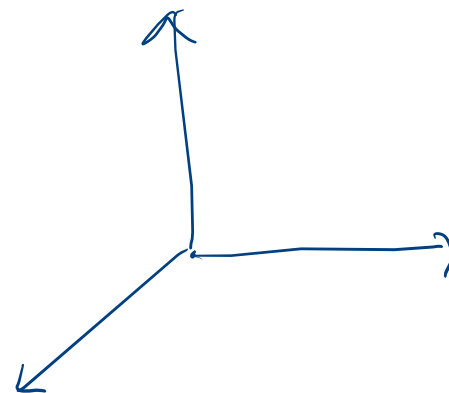
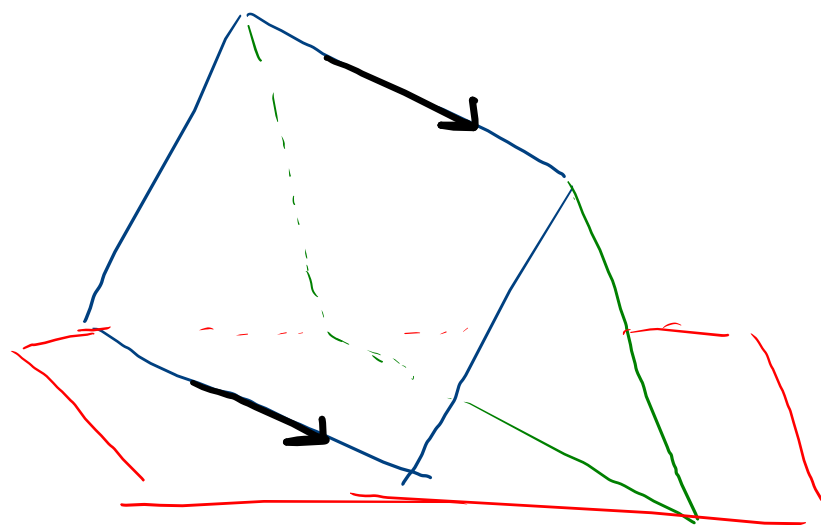
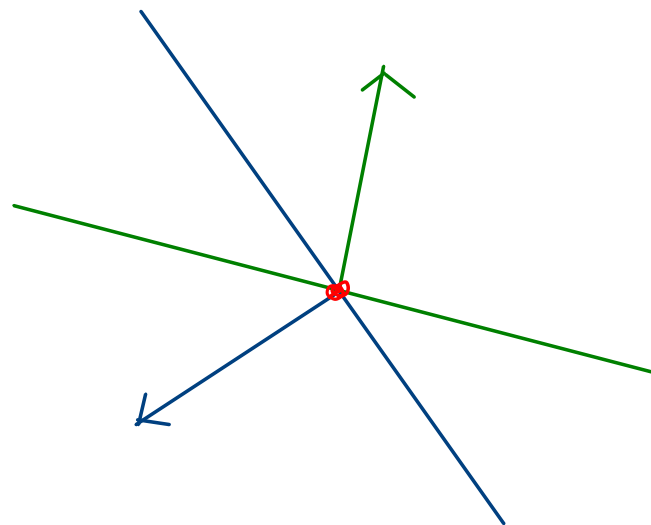
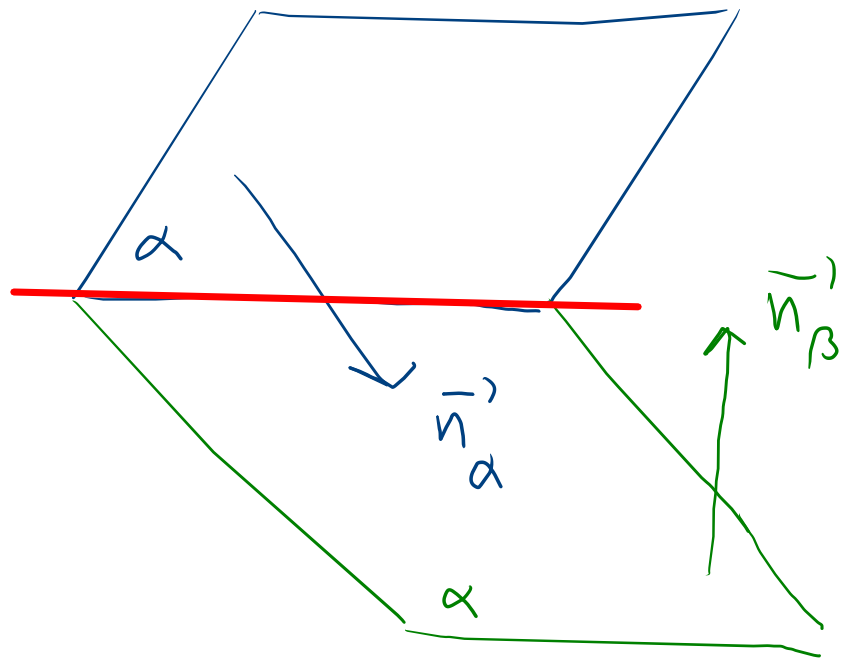
$$(\beta) : 2x - y - z + 2 = 0 \quad \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\gamma) : x + 2y + 3z - 1 = 0 \quad \vec{n}_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, alors $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 21 \\ -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_\beta \times \vec{n}_\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$



3.5.15 Démontrer que les plans d'équations $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$ et $x + 2y + 3z - 1 = 0$ ont une droite commune dont on donnera les équations cartésiennes.

$$\begin{cases} 7x + 4y + 7z = -1 \\ 2x - y - z = -2 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} y & y \\ \hline \cdot 1 & \cdot 1 \\ \cdot 4 & \\ \cdot (-2) & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 3z = -9 \\ 5x + z = -3 \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 5x + z = -3 \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$$

est l'équation d'une droite

3.5.15 Démontrer que les plans d'équations $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$ et $x + 2y + 3z - 1 = 0$ ont une droite commune dont on donnera les équations cartésiennes.

$$(\alpha): \begin{cases} 7x + 4y + 7z = -1 \end{cases}$$

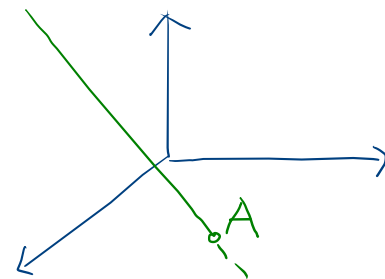
$$(\beta): \begin{cases} 2x - y - z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y & = -1 - 7k \\ 2x - y & = 2 + k \\ z & = k \end{cases} \begin{matrix} x & y \\ \cdot 2 & \cdot 1 \\ \cdot (-7) & \cdot 4 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15y = -16 - 21k \\ 15x = 7 - 3k \\ z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{15} - \frac{1}{5}k \\ y = \frac{-16}{15} - \frac{7}{5}k \\ z = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/15 \\ -16/15 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{OA}$

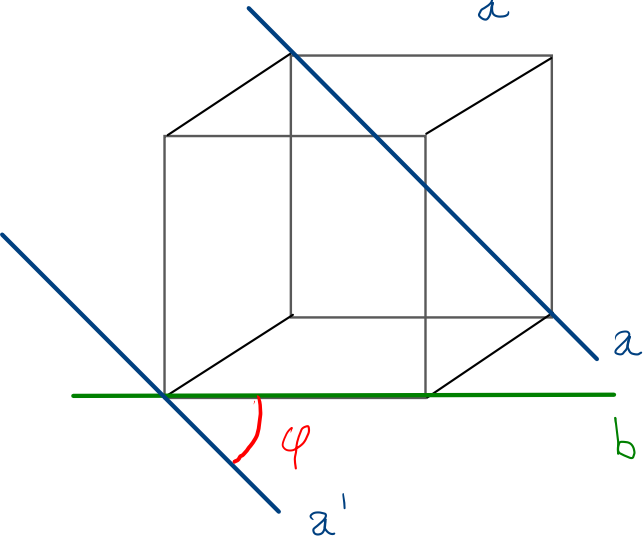


$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/15 \\ -16/15 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Angle entre deux droites

3.6.1 Calculer l'angle aigu déterminé par les droites d'équations :

(a): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\vec{a}}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$ et (b): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + m \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\vec{b}}, \text{ avec } m \in \mathbb{R}$



L'angle entre deux droites est l'angle formé par leur vecteur directeur

$a // a'$

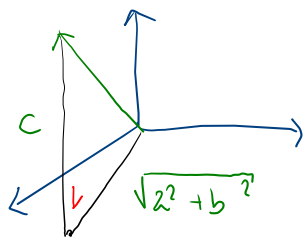
φ : angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$

Angle aigu de deux droites $\cos(\varphi) = \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{\|\vec{d}_1\| \|\vec{d}_2\|}$ $\left(\sin(\varphi) = \frac{\|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\|}{\|\vec{d}_1\| \|\vec{d}_2\|} \right)$

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{|1 - 1 + 2|}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

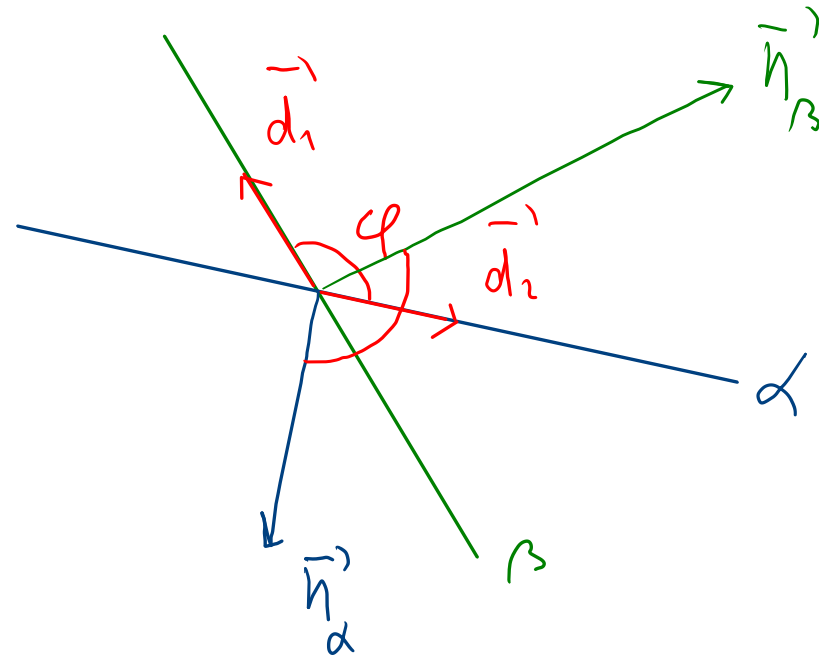
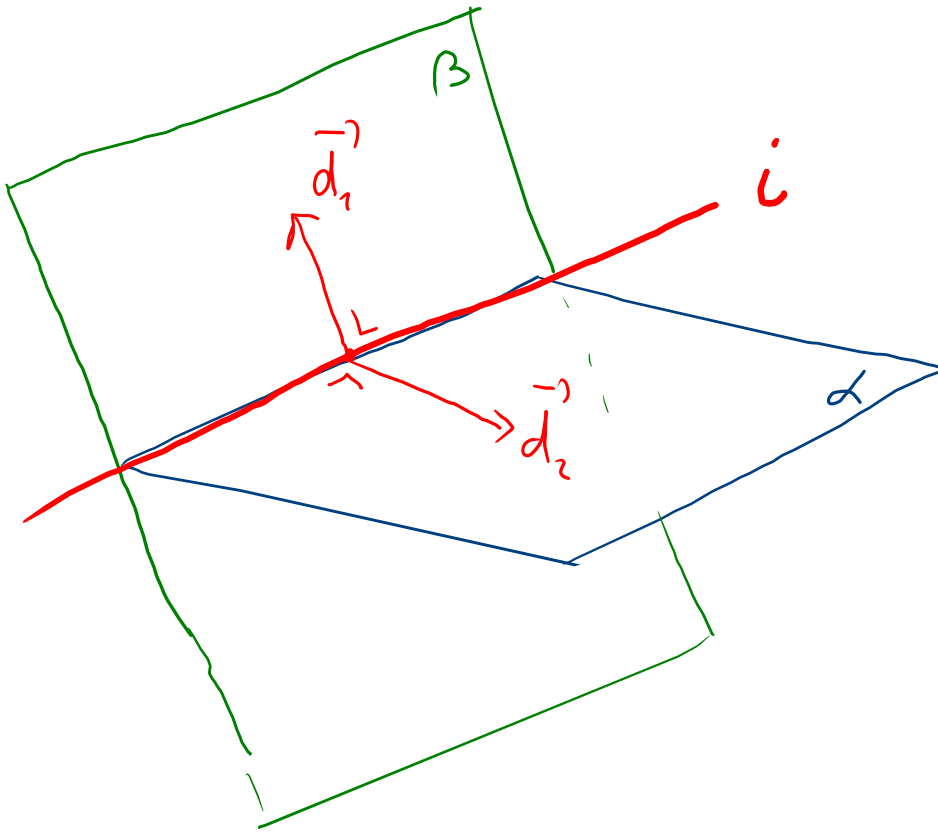


$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

3.6.2 Calculer l'angle aigu déterminé par les plans α et β :

a) $\alpha : 3y - z = 0$

$\beta : 2y + z = 0$



Angle aigu de deux plans

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}$$

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

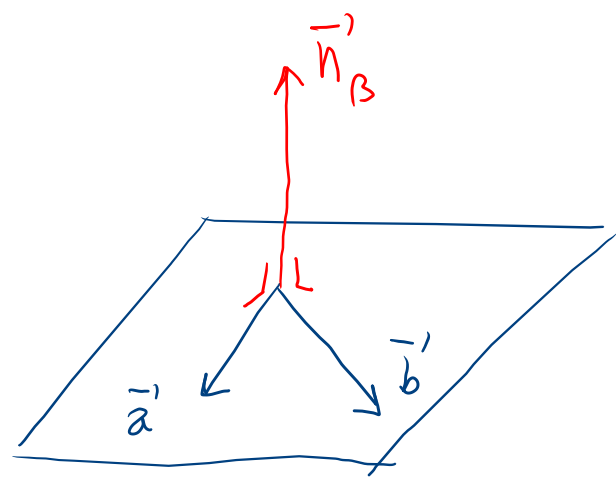
$$\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

3.6.2 Calculer l'angle aigu déterminé par les plans α et β :

b) $\alpha : \begin{cases} x = 5 + 4\lambda - \mu \\ y = -7 + 1\lambda + 2\mu \\ z = 11 + 3\lambda + 5\mu \end{cases}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } u, v \in \mathbb{R}$



$$\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & -2 & -6 & \vec{e}_1 & -2 \\ \vec{e}_2 & 1 & 0 & \vec{e}_2 & 1 \\ \vec{e}_3 & 0 & 1 & \vec{e}_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

+ + +

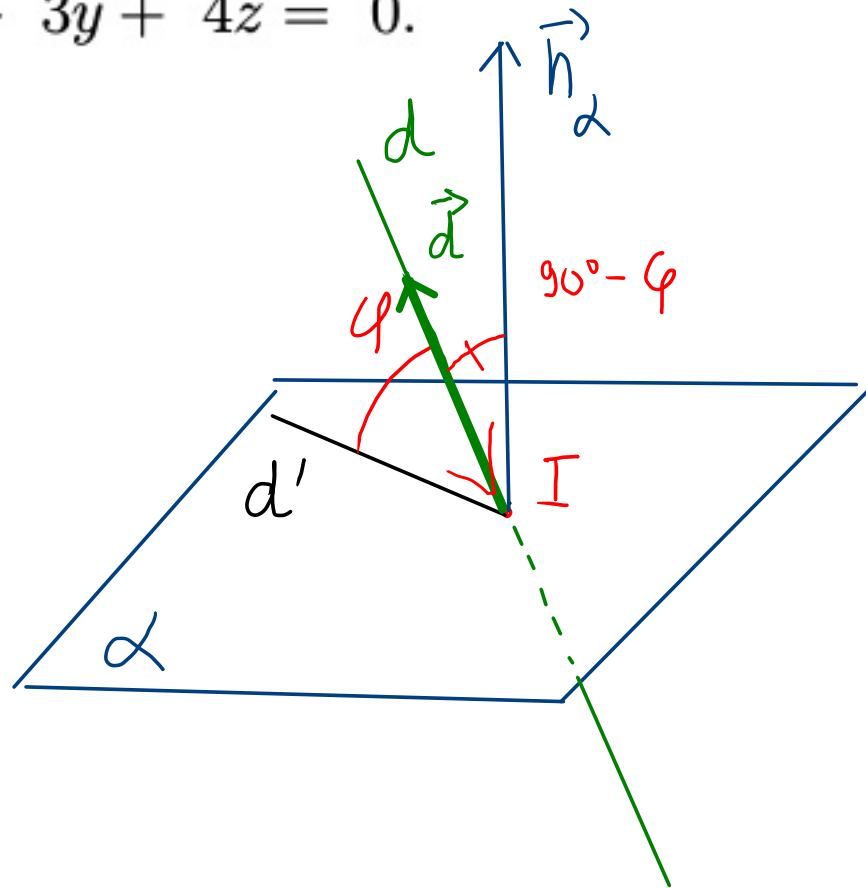
$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -23 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Composantes du produit vectoriel pg 52

Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, alors $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

Angle entre un plan et une droite

3.6.3 Calculer l'angle aigu entre la droite $d : \begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = 5k \\ z = -3 + k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$, et le plan $\alpha : 2x + 3y + 4z = 0$.



d' projection verticale de d sur α

Angle aigu d'une droite et d'un plan $\sin(\varphi) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}_1|}{\|\vec{d}\| \|\vec{n}_1\|} = \cos(90^\circ - \varphi)$

Vendredi $\rightarrow$ 3.6.3