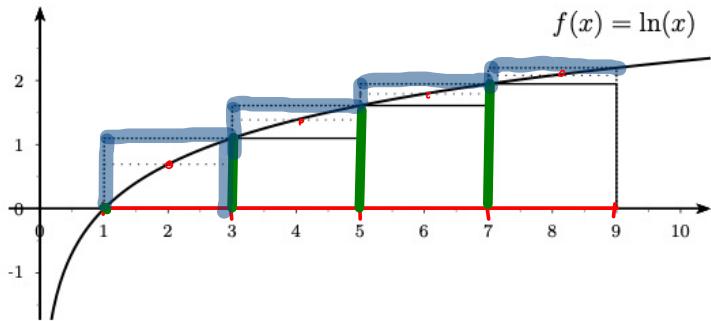


2.1.2 Considérons la fonction $f(x) = \ln(x)$ sur l'intervalle $[1;9]$. En subdivisant cet intervalle en quatre sous-intervalles d'égale longueur, trouver la somme intégrale inférieure,

la somme intégrale supérieure et la somme de Riemann lorsqu'on utilise le point milieu de chacun des sous-intervalles.



$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$$

Pas 2 $\sigma = (1; 3; 5; 7; 9)$

aire inférieure : $a = 0 \cdot 2 + \ln(3) \cdot 2 + \ln(5) \cdot 2 + \ln(7) \cdot 2$
 $= 2 (0 + \ln(3) + \ln(5) + \ln(7))$
 $= 2 \cdot \ln(105) \cong 9,31$

Aire supérieure : $A = 2 (\ln(3) + \ln(5) + \ln(7) + \ln(9))$
 $= 2 \ln(945) \cong 13,70$

Aire de Riemann : $A_R = 2 (\ln(2) + \ln(4) + \ln(6) + \ln(8))$
 $= 2 \cdot \ln(384) \cong \underline{\underline{11,90}}$

9

$$\int_1^9 \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} dx = x(\ln(x) - 1) \Big|_1^9 = 9(\ln(9) - 1) - 1(\ln(1) - 1)$$

$$= 9 \ln(9) - 9 + 1$$

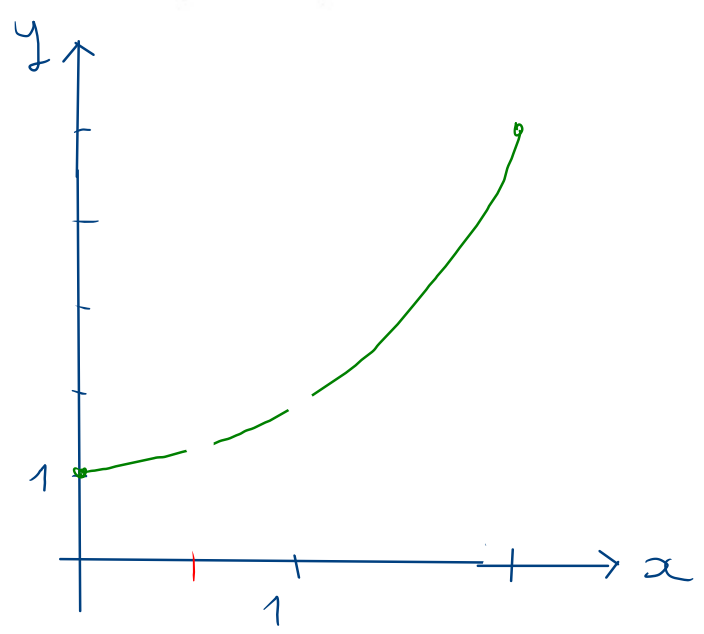
$$\cong 11,77$$

CRN

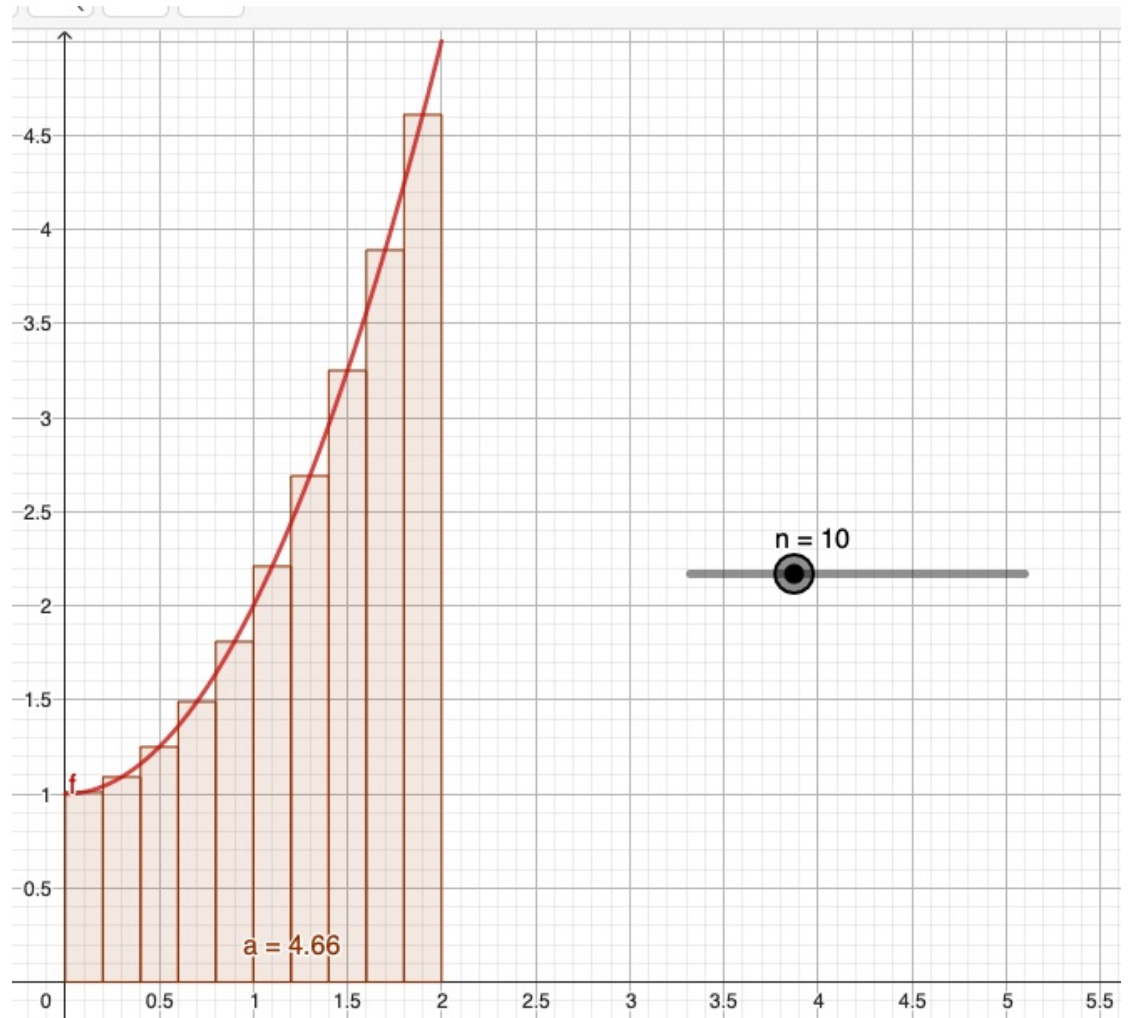
ln(x)

$x(\ln(x) - 1)$

2.1.4 En utilisant une somme de Riemann, trouver une approximation de l'aire sous la courbe $y = x^2 + 1$ entre les verticales $x = 0$ et $x = 2$.



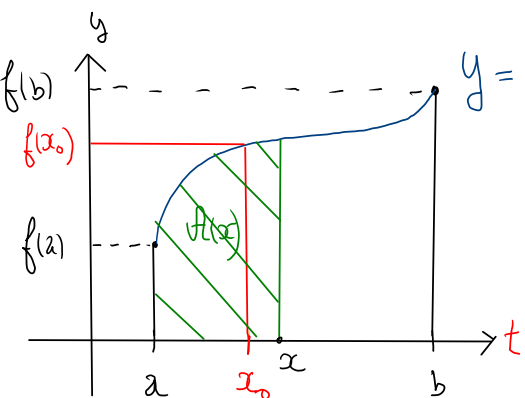
$$f(0) = 1$$
$$f(2) = 5$$



Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$

Notons $f(t) = y$ une valeur en $t \in [a, b]$



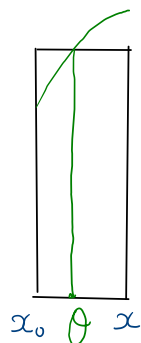
De plus, pour $x \in [a, b]$,
considérons l'aire algébrique

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

On constate que $A(x)$ est une fonction définie et continue sur $[a, b]$. En particulier $A(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$

Pour $x_0 \in]a, b[$: $A(x_0) = \int_a^{x_0} f(t) dt$

Calculons $A(x) - A(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt$



- Aire algébrique du domaine fermé limité par la courbe, l'axe horizontal et les deux verticales en x_0 et x .

- Soit $\theta \in [x_0, x]$

L'aire de ce rectangle de base $(x - x_0)$ et de hauteur $f(\theta)$ vaut $(x - x_0) \cdot f(\theta)$.

Calculons le nombre dérivé de A en $x_0 \in [a, b]$

$$\begin{aligned} A'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)} f(\theta)}{\cancel{x-x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(\theta) = f(x_0) \end{aligned}$$

Connaissant le nombre dérivé $A'(x_0) = f(x_0)$, on a la formule $x \in [a, b]$:

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

Ainsi la dérivée d'une intégrale définie par rapport à sa borne supérieure est égale à la valeur de la fonction intégrée en sa borne supérieure.

Théorème fondamental de l'analyse

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{est une primitive de } f(x)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &= \left. \frac{1}{3} x^3 + 4 \right|_0^1 = \left(\frac{1}{3} + 4 \right) - (+4) = \frac{1}{3} \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + 4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left. \frac{1}{3} x^3 + x \right|_0^2 = \left(\frac{8}{3} + 2 \right) - 0 = \frac{14}{3}$$

2.2.1 Pour chacune des questions ci-dessous, montrer que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$:

a) $F(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^7}}$ et $f(x) = \frac{7}{\sqrt{x^9}}$;

b) $F(x) = \frac{2x^2 - 1}{2 - x^2} + 7$ et $f(x) = \frac{6x}{(2 - x^2)^2}$;

c) $F(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - 11$ et $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{(x+1)^3}}$;

d) $F(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}$.