1.2.18 Dans chacun des cas suivants, montrer que $(e_1; e_2; e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les composantes de u relativement à cette base :

a) $e_1 = (1;1;-1)$ $\quad e_2 = (1;-1;0)$ $\quad e_3 = (1;0;1)$ $\quad u = (0;1;0)$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base

Résultat.

Soit V un ev de dim n.
Soit $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de n vecteurs.

① Si $\mathcal{F}$ est libre alors elle est génératrice
② Si $\mathcal{F}$ est un système de générateurs alors elle est libre.

$$x(1,1,-1) + y(1,-1,0) + z(1,0,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x = y \\ x = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) $e_1 = (1;1;-1)$ $e_2 = (1;-1;0)$ $e_3 = (1;0;1)$ $u = (0;1;0)$

$$x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3 = u$$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\mathcal{B}^* = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \big) \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*}$$

base naturelle

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = -2/3 \\ z = 1/3 \end{cases}$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

b) ...

1.2.19 Soit P_2 l'ensemble des polynômes de la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont des nombres réels. Montrer que la famille $(2 - x; 1 + 2x; 1 - x^2)$ est une base de P_2. Calculer les composantes relativement à cette base des polynômes x^2 et $(2x - 1)^2$.

$$P_2 = \{ p = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

est un espace vectoriel de dimension 3

$$\mathcal{B} = (x^2 ; x ; 1)$$ base naturelle

$e_1 = x^2$, $e_2 = x$, $e_3 = 1$

$f_1 = 2 - x$, $f_2 = 1 + 2x$, $f_3 = 1 - x^2$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} , \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} , \quad f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$\mathcal{B}^* = (2 - x; 1 + 2x; 1 - x^2)$

$$a(-x + 2) + b(2x + 1) + c(-x^2 + 1) = 0$$

$$-c\,x^2 + (-a + 2b)\,x + (2a + b + c) = 0$$

$$\begin{cases} -c = 0 \\ -a + 2b = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a - 2b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Donc la famille est libre. C'est une base.

$$\mathcal{B}^* = \overline{(2-x;\, 1+2x;\, 1-x^2)}$$

$$g_1 = x^2 \quad , \quad g_2 = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

① $$a(-x+2) + b(2x+1) + c(-x^2+1) = x^2$$

$$\begin{cases} -c = 1 \\ -a + 2b = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a - 2b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a = \frac{2}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*} = x^2$$

② $$g_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 14/5 \\ -3/5 \\ -4 \end{pmatrix} = 4x^2 - 4x + 1$$

1.2.20 Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $M_2(\mathbb{R})$. f_1 f_2

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$