

09.09.26



$$\vec{n}_\alpha \perp \alpha \quad . \quad \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} x_0 - a_0 \\ y_0 - b_0 \\ z_0 - c_0 \end{pmatrix}$$

$$d'_{ou} \quad S(P, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

3.6.8 Calculer la distance du point P au plan α dans les cas suivants :

a) $P(-8; 7; 0)$ $\alpha : 2x - 2y + z + 6 = 0, \quad \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $P(6; 1; -2)$ $\alpha : \begin{cases} x = 3 - 4\lambda + 8\mu \\ y = 2 - 3\lambda + 2\mu \\ z = 1 + 3\lambda + 6\mu \end{cases}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

a)
$$d(P, \alpha) = \frac{|2 \cdot (-8) - 2 \cdot 7 + 0 + 6|}{\sqrt{9}} = \frac{24}{3} = 8$$

b)
$$\begin{cases} x = 3 - 4\kappa + 8t \\ y = 2 - 3\kappa + 2t \\ z = 1 + 3\kappa + 6t \end{cases} \begin{vmatrix} \kappa \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \kappa \\ \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{vmatrix}$$

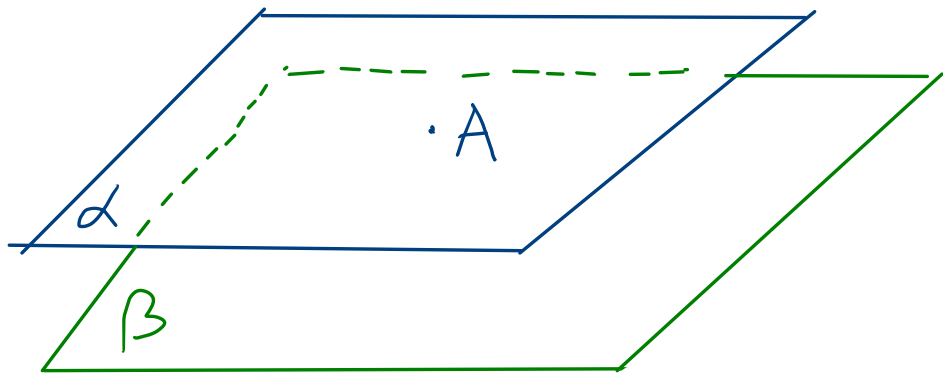
$\Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 3 + 8t & \cdot 6 \\ 3x + 4z = 13 + 48t & \cdot (-1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow -3x + 6y + 2z = 5$

$\Leftrightarrow \underline{(\alpha) : 3x - 6y - 2z + 5 = 0}$

$$d(P, \alpha) = \frac{|3 \cdot 6 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{9 + 36 + 4}} = \frac{21}{7} = 3$$

3.6.9 Vérifier que les plans d'équations $3x + 12y - 4z = 18$ et $-6x - 24y + 8z - 146 = 0$ sont parallèles et calculer la distance qui les sépare.



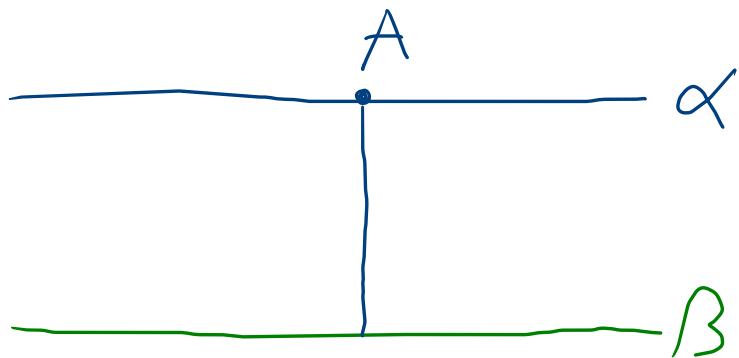
$$(\alpha) : 3x + 12y - 4z - 18 = 0$$

$$(\beta) : 3x + 12y - 4z + 73 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

$$A(6, 0, 0) \in \alpha$$

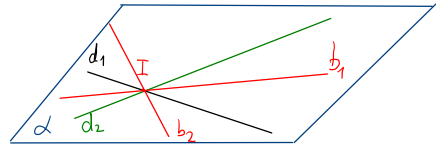
$$\delta(\alpha, \beta) = \delta(A, \beta) = \frac{|18 + 0 + 0 + 73|}{\sqrt{9 + 144 + 16}} = \frac{91}{13} = 7$$



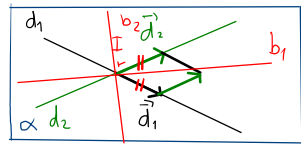
3.6.7 Considérons les droites concourantes d_1 et d_2 données ci-dessous :

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + 3k \\ z = -1 + 2k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (d_2): \begin{cases} x = 2n \\ y = 4 - n \\ z = 2 - 3n \end{cases}, \text{ avec } n \in \mathbb{R}$$

Déterminer les équations paramétriques de leurs bissectrices b_1 et b_2 .



Soit α le plan défini par les deux droites sécantes.



$\vec{d}_1$ vecteur directeur de d_1
 $\vec{d}_2$ vecteur directeur de d_2
 tels $\|\vec{d}_2\| = \|\vec{d}_1\|$

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{d}_1\| = \sqrt{14}$$

$$\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{d}_2\| = \sqrt{14}$$

Déterminons le point I , intersection de d_1 et d_2 .

$$\begin{cases} 2 + k = 2n \\ 3 + 3k = 4 - n \\ -1 + 2k = 2 - 3n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 2n = -2 \\ 3k + n = 1 \\ 2k + 3n = 3 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 2 \\ \cdot (-1) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} k - 2n = -2 \\ 5k = 1 \\ 5n = 5 \end{cases}$$

$[2k + 3n = 3]$ on la laisse de côté

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7k = 0 \\ -7n = -7 \\ 2k + 3n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ n = 1 \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow I(2, 3, -1)$$

Les vecteurs directeurs des bissectrices

$$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{d}_1 - \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

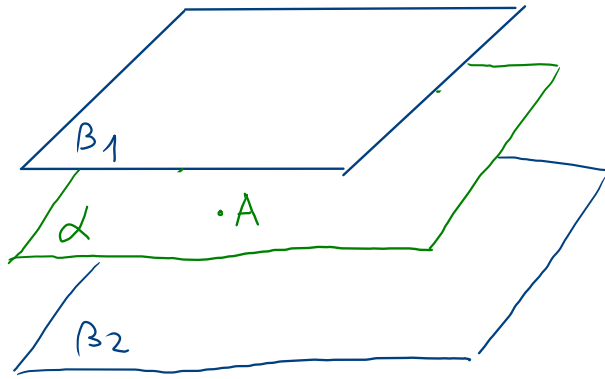
$$(b_1): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(b_2): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

3.6.10 Trouver les équations des plans situés à une distance 6 du plan d'équation

$$\alpha: 9x + 2y - 6z - 8 = 0$$

$$(\beta): 9x + 2y - 6z + d = 0$$



$$A(0; 1; -1) \in \alpha$$

à trouver

$$[ou A(0; 4; 0)] \dots$$

$$S(A, \beta) = \frac{|9 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) + d|}{\sqrt{81 + 4 + 36}} = \frac{|d + 8|}{11} = 6$$

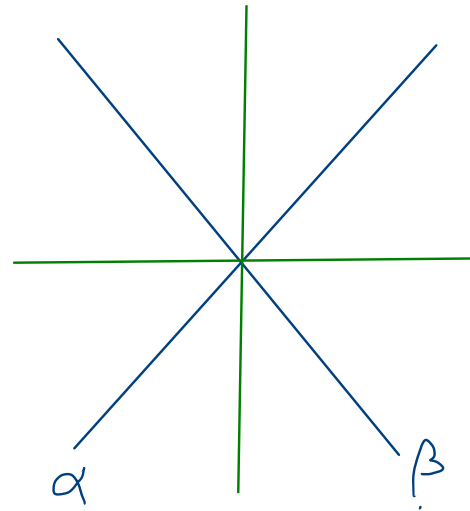
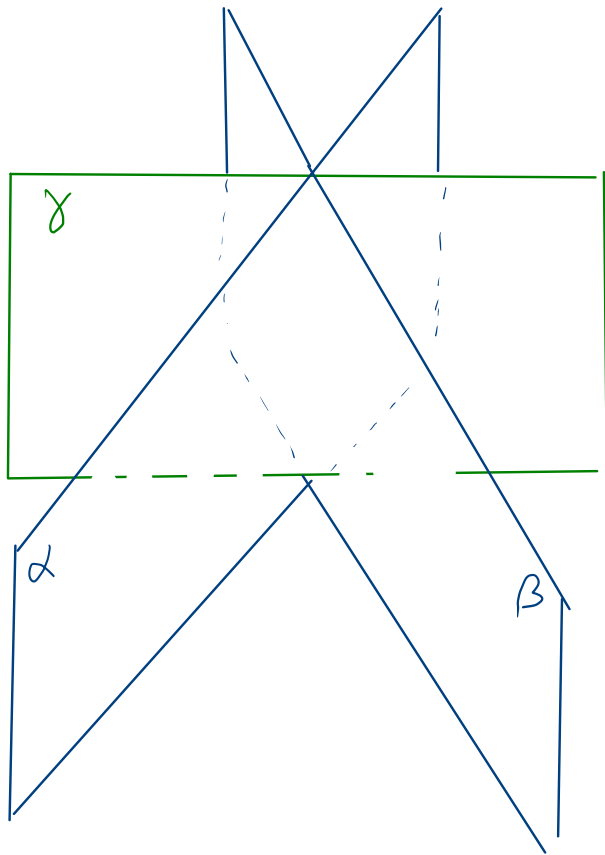
$$\Rightarrow |d + 8| = 66 \quad \Rightarrow \begin{cases} d = 58 \\ d = -74 \end{cases}$$

$$\text{Donc: } (\beta_1): 9x + 2y - 6z + 58 = 0$$

$$(\beta_2): 9x + 2y - 6z - 74 = 0$$

Plans bissecteurs

Vue du dessus



Un plan bissecteur est le lieu géométrique des points équidistants à deux plans donnés.

$$(\alpha): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$(\beta): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

CRM

Plans bissecteurs

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

⊕