

1.1.11 Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 8 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 10 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

a) Matrice des coefficients :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$; T = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit :

$$C \cdot X = T$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2$$

- 1°) Permuter deux lignes,
- 2°) Multiplier une ligne par un nombre non nul
- 3°) Additionner à une ligne un multiple d'une autre ligne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} \cdot L_2 \\ L_3 \leftarrow -1 \cdot L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 17 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow -\frac{1}{6} L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$S = \{ (1, 2, 3) \}$$

1.1.12 Résoudre les systèmes suivants :

Système homogène

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 1 \\ 8x + y + 4z = -1 \end{cases}$$

1 degré de liberté

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -13 & 16 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{-1}{13} \cdot L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{13} \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{16}{13} \end{pmatrix}$$

$$-3 + \frac{32}{13} = \frac{-39 + 32}{13} = \frac{-7}{13}$$

$$\begin{cases} x - \frac{7}{13}z = 0 \\ y - \frac{16}{13}z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{z = K} \quad \text{degré de liberté}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{13}K \\ y = \frac{16}{13}K \\ z = K \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{7}{13}K, \frac{16}{13}K, K \right) \mid K \in \mathbb{R} \right\}$$

Systeme homogène

$$e) \begin{cases} x - 3y + z - t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

deux degré de liberté!

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{7} L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3/7 & 4/7 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -2/7 & 5/7 \\ 0 & \boxed{1} & -3/7 & 4/7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7}z - \frac{5}{7}t \\ y = \frac{3}{7}z - \frac{4}{7}t \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{7}a - \frac{5}{7}b, \frac{3}{7}a - \frac{4}{7}b, a, b \right) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ (2a - 5b, 3a - 4b, 7a, 7b) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 1 \\ 8x + y + 4z = -1 \end{cases}$$

Systeme avec un
degré de liberté

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 8L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 1/7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{7}L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & \boxed{1} & 4/7 & 1/7 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}k \\ y = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}k \\ z = k \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{1}{7} - \frac{3}{7}k; \frac{1}{7} - \frac{4}{7}k; k \right) \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$c) \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 3x - y + z = 3 \\ -3x + 5y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & -9 \\ 0 & 8 & 10 & 17 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 8,5 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix} \quad \text{⚡}$$

$$S = \emptyset$$

1.1.13 Calculer l'inverse de chacune des matrices ci-dessous :

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

1.1. 15

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 5y + 4z = 3 \\ 4x + 5y + 4z = 0 \\ -x - y - z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(A)

$$X = Y$$

$$X = A^{-1} \cdot Y$$

$$5x = 8$$

$$x = \left(\frac{1}{5}\right) \cdot 8$$