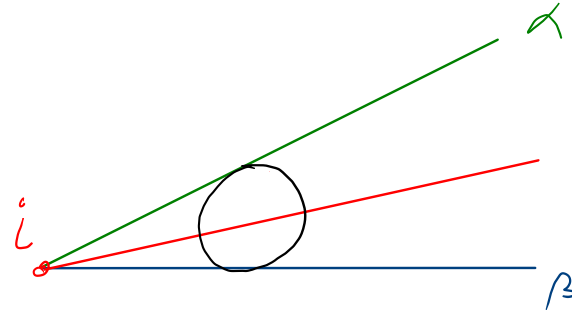
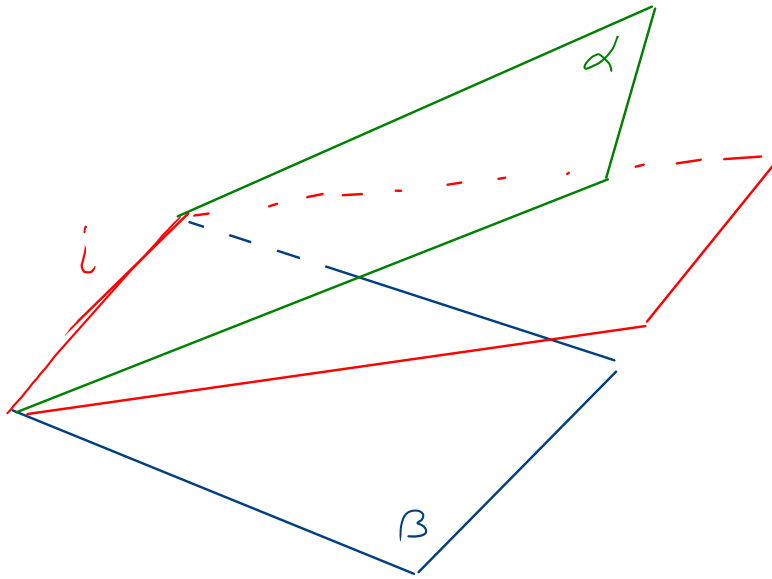


11.09.26

3.6.11 Déterminer les équations des plans bissecteurs des plans $\alpha : 3x + 6z = 2y + 20$ et $\beta : z + 2 = 0$.



$$\frac{3x - 2y + 6z - 20}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = \pm \frac{z + 2}{1}$$

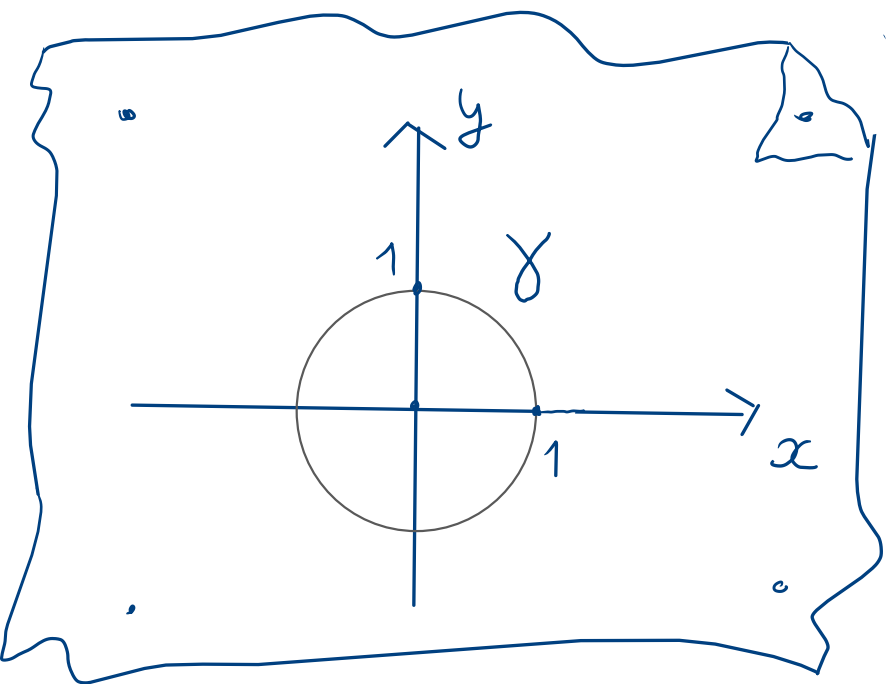
$$\Leftrightarrow \frac{3x - 2y + 6z - 20}{7} = \pm \frac{z + 2}{1}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2y + 6z - 20 = \pm (7z + 14)$$

" + " ; $3x - 2y - z - 34 = 0$

" - " ; $3x - 2y + 13z - 6 = 0$

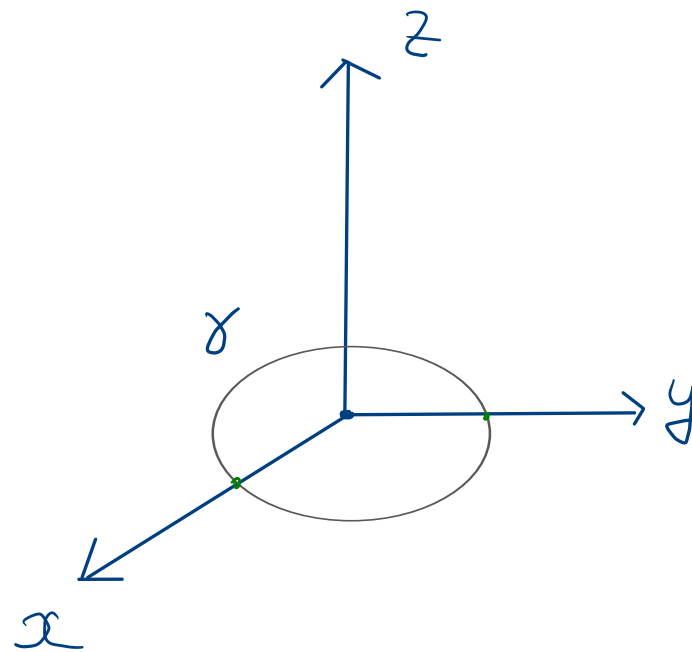
La sphère



$$(\gamma): x^2 + y^2 = 1$$

centre $C(a, b)$, rayon R

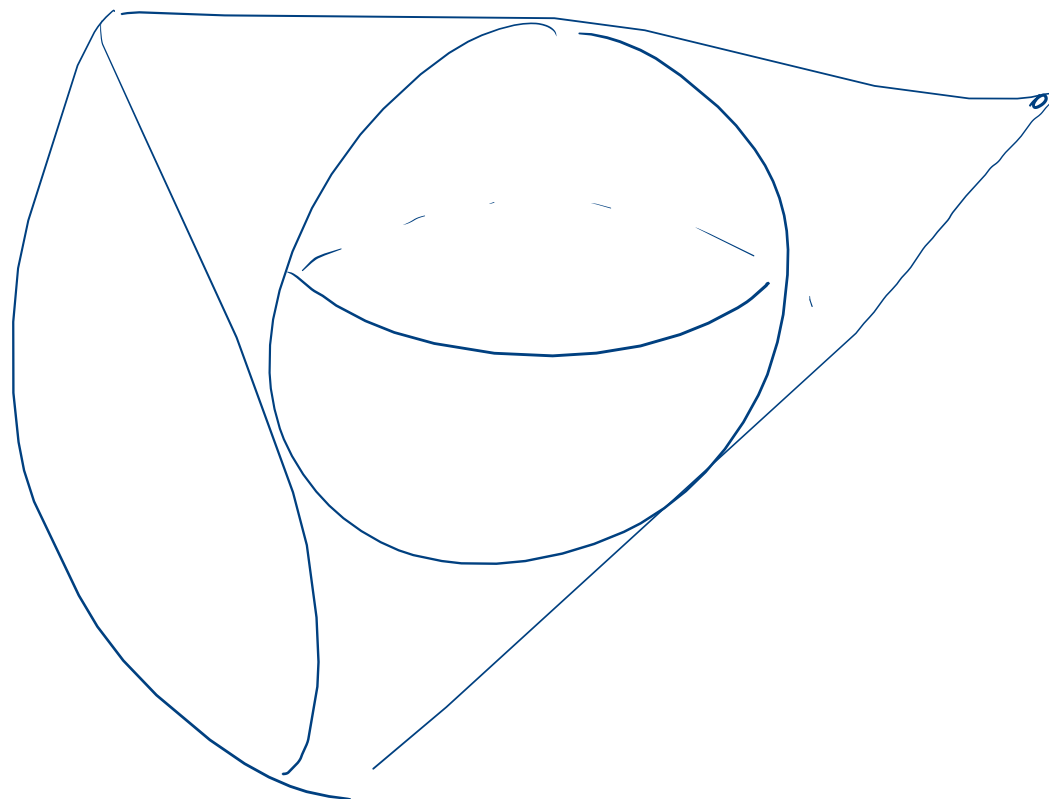
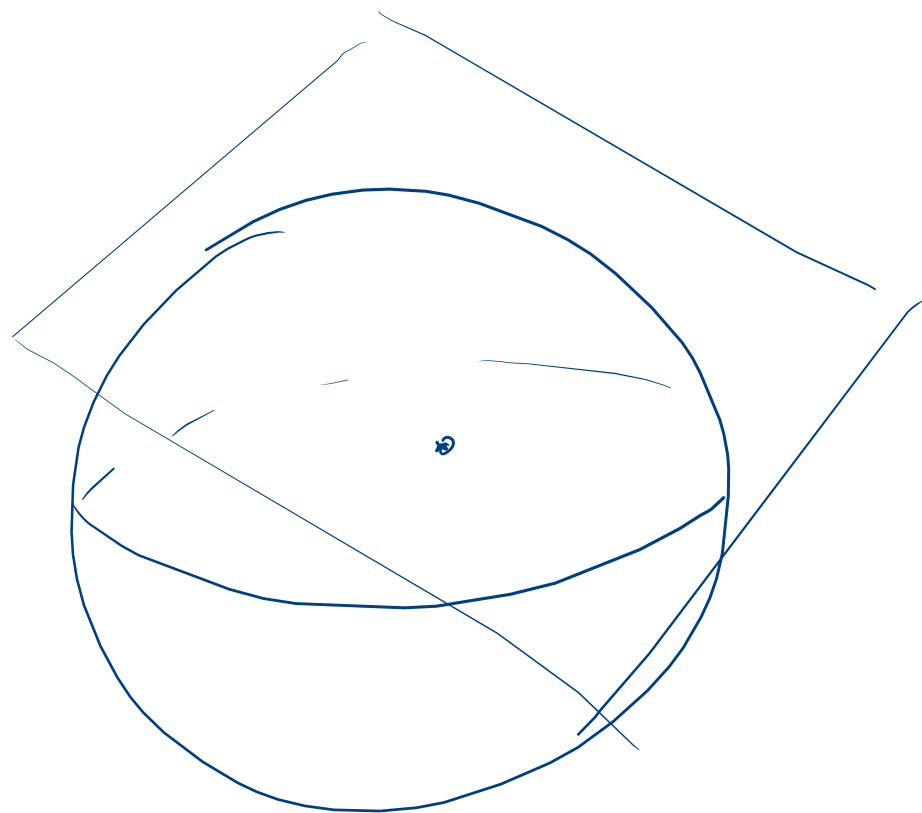
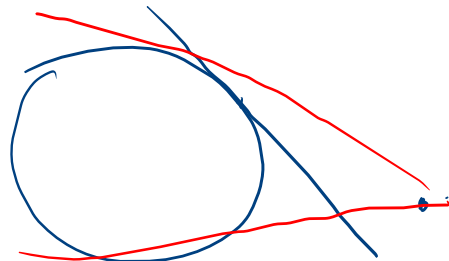
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$



$$(\gamma): \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$C(a, b, c)$ est le centre, rayon R

$$(\Sigma): (x-a)^2 + (y-b)^2 + \underline{(z-c)^2} = R^2$$



3.7.1 Indiquer, parmi les équations données ci-dessous, celles qui définissent une sphère.
Déterminer alors les coordonnées du centre et le rayon de la sphère :

a) $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y + 6z + 56 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x = 14y + 8z - 69$

d) $36x^2 + 36y^2 + 36z^2 - 108x + 96y + 109 = 144z$

$$\text{d) } \frac{36x^2}{x^2 - 3x} + \frac{36y^2}{y^2 + \frac{8}{3}y} + \frac{36z^2 - 108x + 96y - 144z}{z^2 - 4z} = -109 \quad \left| \div 36 \right.$$

$$x^2 - 3x \quad + y^2 + \frac{8}{3}y \quad + z^2 - 4z \quad = -\frac{109}{36}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 + (z - 2)^2 = \frac{-109}{36} + \frac{9}{4} + \frac{16}{9} + 4$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 + (z - 2)^2 = 5$$

$$C\left(\frac{3}{2}; -\frac{4}{3}; 2\right) \quad \text{et} \quad R = \sqrt{5}$$

$$c) \quad \underline{x^2} + y^2 + z^2 + \underline{4x} = 14y + 8z - 69$$

$$\underbrace{x^2 + 4x + 4}_{(x+2)^2}$$

$$= -69 + 4$$

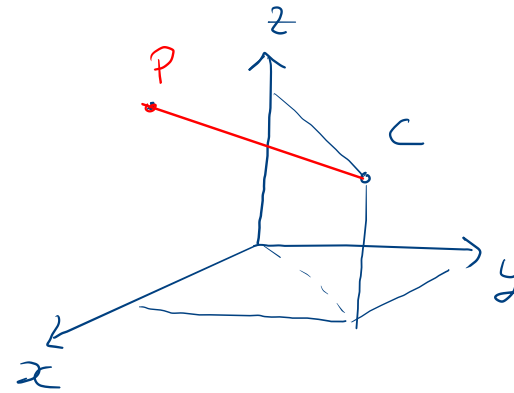
$$(x+5)^2 = x^2 + \underline{\underline{10x}} + 25$$

3.7.2 Déterminer l'équation des sphères définies par les conditions suivantes :

- a) le centre est $C(0; 2; -4)$ et le rayon est égal à 5,
- b) le centre est $C(1; -2; 4)$ et elle passe par le point $P(3; 2; -1)$,
- c) l'un de ses diamètres est $[AB]$, où $A(-1; 0; 5)$ et $B(7; 4; -7)$,

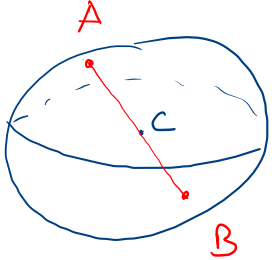
a) $x^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 25$

b) $\vec{CP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$



rayon: $\|\vec{CP}\| = \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45}$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 45$

c)  $C\left(\frac{-1+7}{2}; \frac{0+4}{2}; \frac{5-7}{2}\right)$

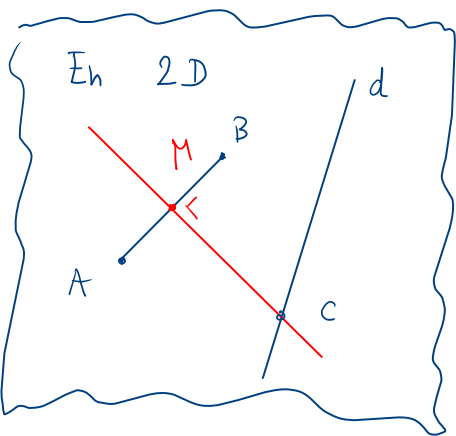
$\Rightarrow C(3; 2; -1)$

rayon: $\vec{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\|\vec{CA}\| = \sqrt{16 + 4 + 36} = \sqrt{56}$

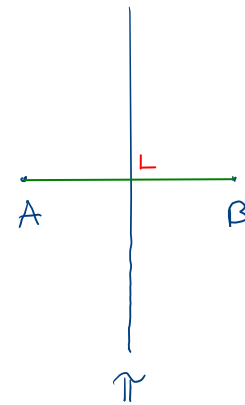
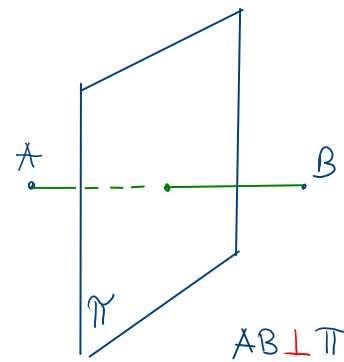
$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 56$

d) elle passe par les points $A(4; 2; -3)$ et $B(-1; 3; 1)$, et a son centre sur la droite

$$d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$



En 3D



$$\vec{n}_\pi = \vec{AB}$$

Le lieu géométrique des points équidistants à deux points donnés est le plan médiateur des points A et B.

① Déterminons π

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \pi$$

$$(\pi): -5x + y + 4z + d = 0$$

$A(4; 2; -3)$ et $B(-1; 3; 1)$

Le milieu de AB est dans π ; $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; -1\right)$

$$\Rightarrow -5 \cdot \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 4(-1) + d = 0$$

$$-\frac{15}{2} + \frac{5}{2} - 4 + d = 0 \Rightarrow d = 9$$

$$(\pi): 5x - y - 4z - 9 = 0$$

② Déterminons le centre de la sphère.

Le centre se situe à l'intersection de la droite d et du plan Π .

$$\begin{cases} 5x - y - 4z - 9 = 0 \\ x = 2 - k \\ y = 3 + 2k \\ z = 7 + 2k \end{cases}$$

Par substitution :

$$\begin{aligned} \Rightarrow 5(2-k) - (3+2k) - 4(7+2k) - 9 &= 0 \\ \underline{10} - \underline{5k} - \underline{3} - \underline{2k} - \underline{28} - \underline{8k} - \underline{9} &= 0 \\ -15k - 30 &= 0 \Rightarrow k = -2 \end{aligned}$$

D'où le centre : $C(4; -1; 3)$

③ Le rayon :

$$\begin{aligned} \vec{AC} &= \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} ; \|\vec{AC}\| = \sqrt{9+36} \\ &= \sqrt{45} \end{aligned}$$

④ La sphère : $(\Sigma) : (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 45$