12.11.26

1.2.20 Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}}_{f_1}; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{f_2}; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}}_{f_3}; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{f_4} \right)$$

est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad f_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_4 = 0$$

$$\begin{cases} 3\alpha + \delta = 0 \\ 6\alpha + \beta - 8\gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta - 12\gamma - \delta = 0 \\ -6\alpha - 4\gamma + 2\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -2 \\ 0 & -1 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -8 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{6}{5}} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow \beta = 0$

$\Rightarrow \gamma = 0$

$\Rightarrow \delta = 0$

$$\begin{cases} 3\alpha + \delta = 0 \\ \beta - 8\gamma - 2\delta = 0 \\ \gamma + \frac{1}{5}\delta = 0 \\ -\frac{6}{5}\delta = 0 \end{cases}$$

1.2.22 Trouver une base du sous-espace E de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$E = \{(x; y; z; t) | x + y = z - t = 0\}$$

$(1, -1, 2, 2) \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

$E = \{ (x; -x; z; z;) \mid x, z \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{B} = ((1, -1; 0; 0), (0; 0, 1, 1))$

$\dim(E) = 2$

$\mathcal{B}_1 = ((1, -1, 4, 4), (2, -2, 2; 2))$

1.2.23 Dans $\mathbb{R}^4$, trouver une base comprenant :

a) le vecteur $(2; 1; 3; 2)$,

b) les vecteurs $(2; 1; 0; 3)$ et $(1; -2; 1; 0)$,

a) $\mathcal{B} = \left((2;1;3;2), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) \right)$

b) $\mathcal{B} = \left(\underbrace{(2;1;0;3), (1;-2,1,0)}_{\text{libre}}, (0,0,1,0), (0,0,0,1) \right)$

Cette famille est libre

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ $\quad B = ((1,0), (0,1))$

$\mathbb{R}^3$ $\quad B = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$

1.2.24 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x;y;z;t) \mid y+z+t=0\}, \quad G = \{(x;y;z;t) \mid x+y=0 \quad \text{et} \quad z=2t\}$$

Déterminer la dimension et une base de F, G et ~~$F \cap G$~~.

- $\mathcal{B}_F = \left((1,0,0,0), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1) \right)$

$$\begin{cases} x = x \\ y+z+t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ t = -y-z \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x+y = 0 \\ z-2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ z-2t = 0 \end{cases}$$

- $\mathcal{B}_G = \left((1,-1,0,0), (0,0,2,1) \right)$

$\dim(F) = 3$ et $\dim(G) = 2$

1.2.26 Trouver une base du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par :

$$\{(3;2;-2);(7;-3;1);(-11;8;-4);(4;-5;3)\}$$

$f_1 - 2f_2$ $\quad$ $f_2 - f_1$

$$\mathcal{F} = \left((3;2;-2);(7;-3;1);(-11;8;-4);(4;-5;3) \right)$$

$$E = \left\langle \left(\underset{f_1}{(3;2;-2)}; \underset{f_2}{(7;-3;1)}; \underset{f_3}{(-11;8;-4)}; \underset{f_4}{(4;-5;3)} \right) \right\rangle$$

$$\begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -11 & 4 \\ 2 & -3 & 8 & -5 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{7}{3} & \frac{-11}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & -3 & 8 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$-5-1$

$L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{-11}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{-23}{3} & \frac{46}{3} & \frac{-23}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{7}{3} & \frac{-11}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{matrix}$$

$\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de E, $\dim(E) = 2$

Application linéaire

Soit U et V deux espaces vectoriels de dimension finie.

Une application f de U dans V est linéaire si

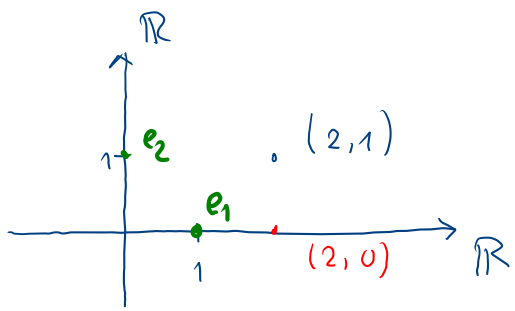
① $u_1, u_2 \in U$, $f(u_1+u_2) = f(u_1) + f(u_2)$

② $\lambda \in \mathbb{R}, u_1 \in U$, $f(\lambda u_1) = \lambda f(u_1)$

Exemples

② $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (x,0)$ projection sur Ox



① $h((x,y)+(a,b)) = h((x+a, y+b)) = (x+a, 0)$

$h(x,y) + h(a,b) = (x,0) + (a,0) = (x+a, 0)$

② $h(\lambda(x,y)) = h((\lambda x, \lambda y)) = (\lambda x, 0)$

$\lambda \cdot h(x,y) = \lambda(x,0) = (\lambda x, 0)$

$h(e_1) = e_1 = (1,0)$

$h(e_2) = (0,0)$

$(x,y) = \underbrace{x \cdot e_1 + y \cdot e_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$

$h(x,y) = x \cdot h(e_1) + y \cdot h(e_2) = (x,0)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{H} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$