

Soit $E = \{ (x, 2x) \mid x \in \mathbb{R} \}$

Exemple : $\alpha_1 = (0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 2)$, $\alpha_3 = (-10, -20)$

$\beta = (1, -1) \notin E$

On définit sur E une opération interne :

$\alpha_1 = (x, 2x)$, $\alpha_2 = (y, 2y)$:

$$\alpha_1 \boxplus \alpha_2 = \underbrace{(x+y, 2x+2y)}_{(u, 2u)} \in E$$

1°) Élément neutre : $0_E = (0, 0)$

$(x, 2x) \boxplus (0, 0) = (x, 2x)$

2°) $\boxplus$ est associative :

$$\begin{aligned} & [(x, 2x) \boxplus (y, 2y)] \boxplus (z, 2z) \\ &= [(x+y, 2x+2y)] \boxplus (z, 2z) = (x+y+z, 2x+2y+2z) \\ &= (x, 2x) \boxplus [(y, 2y) \boxplus (z, 2z)] = \end{aligned}$$

On peut écrire $\alpha_1 \boxplus \alpha_2 \boxplus \alpha_3$

3°) $\boxplus$ est commutative :

$$\begin{aligned} (x, 2x) \boxplus (y, 2y) &= (x+y, 2x+2y) \\ &= (y+x, 2y+2x) \\ &= (y, 2y) \boxplus (x, 2x) \end{aligned}$$

4°) Tout élément admet un opposé

$(x, 2x) \boxplus (-x, -2x) = (0, 0)$

On dit que $(E, \boxplus)$ est un groupe abélien.

On définit sur E une action (ou une opération externe).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda * (x, 2x) = (\lambda x, 2\lambda x)$

Ex: $\sqrt{2} * (2, 4) = (2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

L'action vérifie les propriétés suivantes

$$5^\circ) \quad t * (\underbrace{\lambda}_{\in E}) = (t \cdot \lambda) * \underbrace{\alpha}_{\in E}, \quad t, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in E$$

$$6^\circ) \quad 1 * \alpha = \alpha$$

$$7^\circ) \quad \lambda * (\alpha_1 \square \alpha_2) = (\lambda * \alpha_1) \square (\lambda * \alpha_2)$$

$$8^\circ) \quad \underbrace{(t + \lambda)}_{\in E} * \underbrace{\alpha}_{\in E} = \underbrace{(t * \alpha)}_{\in E} \square \underbrace{(\lambda * \alpha)}_{\in E}$$

$(E, \square, *)$ est un espace vectoriel (réel)

1.2.1 Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, on considère l'addition, ainsi que la loi de composition externe :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\alpha; u) \longmapsto 0$$

L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de ces deux lois, est-il un espace vectoriel ?

$$1^{\circ}) \quad p, q \in \mathbb{Z} \quad p \boxplus q = p + q$$

1^o) à 4^o) ✓

$$2^{\circ}) \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ u \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha \cdot u = 0$$



$$1 \cdot u = 0 \neq u$$

1.2.2 Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère les deux lois de composition définies par :

$$\underline{(x; y)} + \underline{(x'; y')} \longmapsto \underline{(x + x'; y + y')} \quad \text{opération naturelle}$$

$$\underline{\alpha(x; y)} \longmapsto (\alpha x; y)$$

où α, x, x', y, y' sont des nombres réels. Montrer que $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux lois, n'est pas un espace vectoriel.

$$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$$

$$\bullet \quad \boxed{\kappa \left[(x, y) + (x', y') \right]} = \kappa \left(\underline{x + x'}, \underline{y + y'} \right) \\ = \left(\kappa(x + x'), y + y' \right)$$

$$\bullet \quad \boxed{\kappa(x, y) + \kappa(x', y')} = \underline{(\kappa x, y) + (\kappa x', y')} \\ = (\kappa x + \kappa x', y + y')$$

$$5^{\circ}) \quad \overline{\alpha \cdot (\beta \cdot u)} = \overline{(\alpha \beta) \cdot u}$$

$$\alpha \cdot (\beta(x, y)) = \alpha(\beta x, y) = (\alpha \beta x, y) = \alpha \beta(x, y)$$

$$8^{\circ}) \quad \underline{(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, u \in E$$

$$(1+1)(x, y) = \underline{(2x, y)}$$

$$1 \cdot (x, y) + 1 \cdot (x, y) = (x, y) + (x, y) = \underline{(2x, 2y)}$$

1.2.4 Si V est un espace vectoriel, $u, v \in V$, parmi les expressions suivantes, lesquelles ont un sens ?

a) $\frac{u}{3} = \frac{1}{3}u$ 

c) ~~$u - 4$~~

e) ~~$u^2 - 2u + 1$~~

b) $\frac{u+v}{2} - u$ 

d) ~~$\frac{u}{v} + \frac{v}{u}$~~

f) ~~$2u - 3uv$~~

$$\frac{1}{2}(u+v) - u$$

Dans $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, on définit

- $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$
- $\lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Montrer que $\mathbb{R}^3$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel.