

21.08.26

3.4.5 Deux droites d_1 et d_2 sont données par leurs équations. Déterminer si elles sont concourantes, parallèles, confondues ou gauches et, selon les cas, leur éventuel point commun :

a) $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = -2 - 5k \\ z = 5 + k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

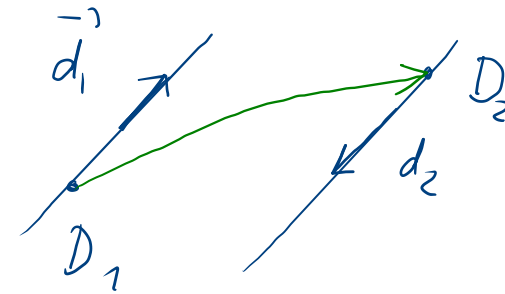
$$D_1(1; -2; 5)$$

$d_2 : \begin{cases} x = -2 - 6n \\ y = 3 + 10n \\ z = 4 - 2n \end{cases}, \text{ avec } n \in \mathbb{R}$

$$\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D_2(-2; 3; 4)$$

confondues



$$\overrightarrow{D_1 D_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cup \vec{d}_1$$

$$\Rightarrow d_1 \equiv d_2$$

b) $d_1 : \begin{cases} x = 2 - 5k \\ y = 3 + 2k \\ z = 5 - 4k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$

$d_2 : \begin{cases} x = 2 - 5n \\ y = 3 - 2n \\ z = 5 - 4n \end{cases}, \text{ avec } n \in \mathbb{R}$

$$D_1(2, 3, 5)$$

$$\equiv D_2(2, 3, 5)$$

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

non colinéaire à

$$\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

 d_1 et d_2 sécantes

$$c) d_1: \frac{x-7}{2} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-3}{3}$$

$$d_2: \begin{cases} x = 6 + 4k \\ y = -1 - 12k \\ z = 5 - 5k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 7 + 2k \\ y = 5 - 6k \\ z = 3 + 3k \end{cases}$$

$$d: D(a, b, c) \text{ et } \vec{d} = (d_1, d_2, d_3) \quad d_1 \neq 0, d_2 \neq 0, d_3 \neq 0$$

$$\frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} = \frac{z-c}{d_3}$$

$$D_1(7, 5, 3), \vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad D_2(6, -1, 5), \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

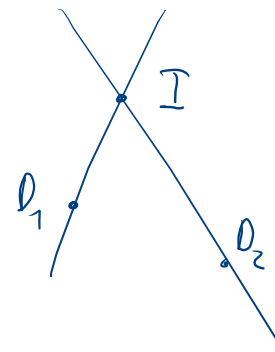
Pas parallèle! Sécantes ou gauches?

On résout le système:

$$\begin{cases} 7 + 2k = 6 + 4k \\ 5 - 6k = -1 - 12k \\ 3 + 3k = 5 - 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k - 2k = 1 \\ -12k + 6k = 6 \\ -5k - 3k = -2 \end{cases} \begin{array}{l} k \\ \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 0 = 9 \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

pas de solution $\Rightarrow d_1$ et d_2 gauches



$$d) d_1: \begin{cases} x + y = 4 \\ 2y + z = 5 \end{cases}$$

$$d_2: \begin{cases} x + 3y + z = 9 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

① d_1 sous forme paramétrique :

$$A(4; 0; 5) \quad B(3; 1; 3) \quad , \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 4 - k \\ y = 0 + k \\ z = 5 - 2k \end{cases}$$

② d_2 sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x + 3y + z = 9 \\ x - y - z = 1 \\ y = l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 9 - 3l \\ x - z = 1 + l \\ y = l \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & z \\ \hline \cdot 1 & \cdot 1 \\ \cdot (-1) & \cdot 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2z = 8 - 4l \\ 2x = 10 - 2l \\ y = l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - l \\ y = l \\ z = 4 - 2l \end{cases}$$

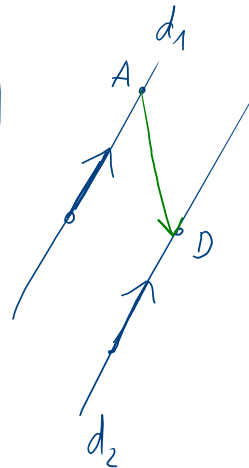
$$A(4; 0; 5) \in d_1$$

$$D(5; 0; 4) \in d_2$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ parallèles

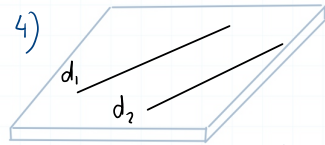
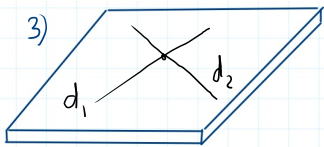
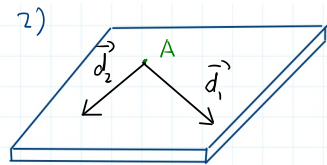
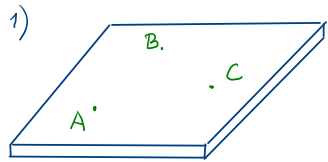
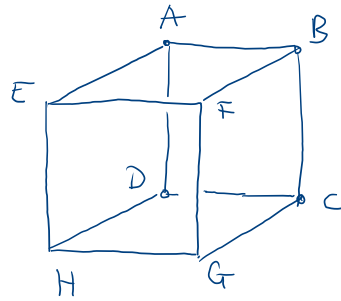
$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \cup \quad \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Le plan dans l'espace

On peut donner un plan par :

- 1) 3 points (A, B, H) non alignés
- 2) 1 point et deux vecteurs directeurs $(H, \vec{HD}, \vec{HE})$
- 3) deux droites sécantes (AB, AG)
- 4) deux droites parallèles (AD, FG)



de 2) : $A(a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

Une équation paramétrique vectorielle :

$$(\alpha): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = \vec{OA} + k \vec{V}_1 + l \vec{V}_2$$

On détermine ensuite une équation cartésienne de α en écrivant l'équation ci-dessus comme un système et en éliminant les paramètres k et l .

3.5.1 On donne les plans $\alpha : 2x + 3y - 3z - 5 = 0$ et

$$\beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les points $A(-2; 7; 8)$ et $B(4; 3/2; 5/2)$ appartiennent-ils à ces plans ?

$$(B): \begin{cases} x = 3 - 2\lambda + \mu \\ y = 1 + \lambda - 4\mu \\ z = 5 + 3\lambda + 3\mu \end{cases} \begin{array}{c|c} \lambda & \mu \\ \hline \cdot 1 & \cdot 3 \\ \cdot 2 & \\ & \cdot 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 - 7\mu \\ 3x + 2z = 19 + 9\mu \end{cases} \begin{array}{c|c} \cdot 9 \\ \cdot 7 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 30x + 18y + 14z = 178$$

$$\Leftrightarrow (B): 15x + 9y + 7z - 89 = 0$$

$$A(-2; 7; 8) : -30 + 63 + 56 - 89 = 0 \quad \Rightarrow \quad A \in \beta$$